Matematiikan viestintä, harjoitus 3.

Tehtävä 1.

Otit jo viime kerralla käyttöön ams-makropaketit: amsfonts, amsmath, amssymb ja amsthm. Näiden pakettien avulla voit luoda ”lause -ympäristöjä”. Kirjoita seuraavat rivit esittelyosaasi, jolloin saat lauseille, määritelmille yms. valmiiksi oikeat tyylit

```
\theoremstyle{plain}
\newtheorem{lause}{Lause}[subsection]
\newtheorem{lemma}[lause]{Lemma}
\newtheorem{propositio}[lause]{Propositio}
\newtheorem{seuraus}[lause]{Seuraus}

\theoremstyle{definition}
\newtheorem{määritelmä}[lause]{Määritelmä}
\newtheorem{esimerkki}[lause]{Esimerkki}

\theoremstyle{remark}
\newtheorem{huomautus}[lause]{Huomautus}

\numberwithin{equation}{section}

\newenvironment{todistus}
{\noindent{\it Todistus. }}{\hfill $\Box$\par\vspace{2.5mm}}
```

Tehtävä 2.

Komentoja voi määritellä itsekin `\newcommand` käskyn avulla. Hyödyllinen tämä on ainakin pitkien komentosarjojen lyhentämiseen. Esimerkiksi

```
\newcommand{\R}{\mathbb{R}}
```

määrittelee käskyn `\R`, joka tekee reaalilukujoukon merkin $\mathbb{R}$. Ensimmäisessä aaltosulussa on uuden käskyn nimi, ja toisessa aaltosulussa käsky, johon uusi käsky viittaa. Tehtävä: lisää ylläolevan lisäksi dokumenttisi esittelyosaan lyhennykset käskyille

```
\mathbf{Q}
\mathbf{E}
```

ja käytä niitä hyödyksi tehtävässä 3.

Tehtävä 3.

Pyri saamaan aikaan seuraava teksti samalla tavalla kuin se on kirjoitettu:

Määritelmä 0.0.1. Gaussin prosessin $\{X(t) : t \in \mathbb{R}\}$ sanotaan olevan *L^2-jatkuva*, jos kaikille arvoille t_0 ja ε on olemassa δ siten, että kun

$$|t_0 - t| < \delta$$

niin

$$\mathbf{E}\left|X(t_0) - X(t)\right|^2 < \varepsilon.$$

Lause 0.0.2. *Olkoon X stationaarinen Gaussin prosessi. Tällöin*

$$\mathbf{E}[X(t_2) - X(t_1)]^2 = 2[\mathbf{Q}(0) - \mathbf{Q}(\delta)],$$

kun $\delta = t_2 - t_1$.

Todistus. Käyttämällä stationaarisuuden oletuksia saadaan

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[X(t_2) - X(t_1)]^2 &= \mathbf{E}[X(t_2)^2 - 2X(t_2)X(t_1) + X(t_1)^2] \\
&= \mathbf{E}(X(t_2)^2) - 2\mathbf{E}(X(t_2)X(t_1)) + \mathbf{E}(X(t_1)^2) \\
&= \mathbf{Q}(t_2 - t_2) - 2\mathbf{Q}(t_2 - t_1) + \mathbf{Q}(t_1 - t_1) \\
&= \mathbf{Q}(0) - 2\mathbf{Q}(\delta) + \mathbf{Q}(0) \\
&= 2[\mathbf{Q}(0) - \mathbf{Q}(\delta)].
\end{aligned}$$

□

Lause 0.0.2 kertoo, että L^2-jatkuvuus on tasaista ja että $\mathbf{Q}$ saavuttaa suurimman arvonsa pisteessä nolla, sillä

$$\mathbf{E}[X(t_2) - X(t_1)]^2$$

on aina positiivinen ja tällöin täytyy välttämättä olla $\mathbf{Q}(0) \geq \mathbf{Q}(\delta)$ kaikilla arvoilla δ.

Huomautus 0.0.3. Olkoon X L^2-jatkuva ja tarkastellaan kovarianssifunktion $\mathbf{Q}$ jatkuvuutta origossa. Lauseen 0.0.2 perusteella saadaan

$$\begin{aligned}
\lim_{t \to 0} |\mathbf{Q}(t) - \mathbf{Q}(0)| &= \lim_{t \to 0} |\mathbf{Q}(0) - \mathbf{Q}(t - 0)| \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{1}{2} \left|\mathbf{E}[X(t) - X(0)]^2\right| \\
&= 0,
\end{aligned}$$

koska $\mathbf{E}\left|X(t) - X(0)\right|^2 < \varepsilon$, kun $t \to 0$. Näin ollen $\mathbf{Q}$ on jatkuva origossa.