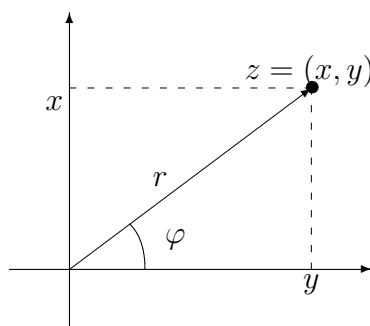


Example from the PDF document

Kertolaskun laajentaminen ei ole yhtä helppoa, sillä valmiina ei ole sopivaa ”vektorituloa”. Kertolaskun laajentamista varten esitetään tason pisteet $z = (x, y) \neq (0, 0)$ napakoordinaattien r ja φ avulla:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$$



Kuva 1: Kompleksilukujen napakoordinaattiesitys

Merkitään $z = (r, \varphi)$. Tulo on nyt määriteltävissä yksinkertaisella kaavalla

$$z_1 z_2 = (r_1 r_2, \varphi_1 + \varphi_2).$$

Siis: Pisteiden z_1 ja z_2 etäisyydet origosta kerrotaan keskenään sekä vaihekulmat lasketaan yhteen.

Erikoisesti on $z_1 z_2 = 0$ aina ja vain kun $z_1 = 0$ tai $z_2 = 0$.

Tarkastellaan reaalilukujen kertolaskua tämän uuden kertolaskun valossa. Olkoon $z = (r, \varphi)$ reaaliluku. Tällöin aina $|z| = r$. Lisäksi

$$\begin{aligned} z = r > 0 &\Leftrightarrow \varphi = 0 + n2\pi \\ z = -r < 0 &\Leftrightarrow \varphi = \pi + n2\pi \end{aligned}$$

Jos nyt $z_1 = (r_1, \varphi_1)$ ja $z_2 = (r_2, \varphi_2)$ ovat kaksi reaalilukua, niin $z_1 z_2 = (r_1 r_2, \varphi_1 + \varphi_2)$, joten

$$\begin{aligned} z_1 z_2 > 0 &\Leftrightarrow \varphi_1 + \varphi_2 = 0 + n2\pi \\ &\Leftrightarrow \varphi_1 = \varphi_2 = 0 + n2\pi \quad \text{tai} \quad \varphi_1 = \varphi_2 = \pi + n2\pi \\ &\Leftrightarrow z_1 > 0 \quad \text{ja} \quad z_2 > 0 \quad \text{tai} \quad z_1 < 0 \quad \text{ja} \quad z_2 < 0. \end{aligned}$$