PELITEORIAN PERUSTEITA

Matti Estola*

29. marraskuuta 2013

Sisältö

*Teksti on suomennettu kirjasta: Gibbons, A Primer in Game Theory.

1 Johdanto

Peliteoria on kehitetty sellaisten tilanteiden analysointiin, jossa kaksi tai useampia aktiivisia päätöksentekijöitä tekevät valiontoja siten, että eri pelaajien valinnat vaikuttavat toisten pelaajien "hyvinvointiin" (pelin lopputulokseen, tulemaan).

Esim. Ammattiliiton ja työantajien palkkaneuvottelu, hallituspuolueiden neuvottelu hallitusohjelmasta, kartelliyritysten neuvottelu tuotantokiintiöistä jne.

Peliteorian avulla voidaan myös analysoida tilanteita, joissa pelaajat eivät aidosti neuvottele asioista vaan tekevät toisistaan tietämättä valintoja, jotka vaikuttavat muiden pelaajien hyvinvointiin.

Esim. Kaikki kilpailutilanteet, joukkue- ja yksilöpelit kuten shakki ja muut lautapelit, urheilukilpailut jne.

Yhteistä pelitilanteille on, että pelaajilla on useita (vähintään kaksi) vaihtoehtoisia **strategioita** (valintoja), joilla he voivat vaikuttaa pelin lopputulokseen. Shakin pelaajalla siirrot, kartelliyrityksillä hyväksyä tai hylätä ehdotettu tuotantokiintiö jne.

2 Peliteoreettisen analyysin vaiheet

Määritellään 1) pelaajat, 2) pelaajien kaikki mahdolliset strategiat sekä 3) peliolosuhteet. Peliolosuhteilla tarkoitetaan sitä, onko kyseessä **staattinen** vai **dynaaminen** peli sekä minkälaista informaatiota pelaajilla on toisten pelaajien valinnoista ja pelin tulemista omissa valintatilanteissaan (siirtovuoroissaan). Informaation laatu jaetaan yleensä kahteen kategoriaan: **täydellinen** ja **epätäydellinen informaatio**.

Pelien luokittelu:

Staattiset pelit; pelataan vain kerran

Täyd. inform. pelit	Epätäyd. inform. pelit
Normaalimuotoiset pelit	Bayesilaiset pelit

Dynaamiset pelit; pelitilanne toistuu useita kertoja (mahdollisesti äärettömän monta)

Jatkuva-aikaiset	pelit	Diskreettiaikaiset	pelit
Täyd. inf.	Epätäyd. inf.	Täyd. inf.	Epätäyd. inf.

Pelin **informaation sanotaan olevan täydellistä (complete information)**, kun pelaajilla on tieto muiden pelaajien mahdollisista strategioista ja pelin **tulemista** (lopputuloksista) kaikissa mahdollisissa tilanteissa.

Dynaamisten pelien yhteydessä täydellisen informaation osalta voidaan edellisten lisäksi asettaa vielä seuraava vaatimus: siirtoa tekevällä pelaajalla on tieto muiden pelaajien aiemmista siirroista. Erona edelliseen pelin informaatiota nimitetään tällöin termillä (**perfect information**).

3 Staattiset pelit täydellisen informaation vallitessa

Oletukset:

1) Jokainen pelaaja tietää muiden pelaajien kaikki mahdolliset **strategiat** sekä pelin lopputulokset **tulemat** kaikissa mahdollisissa tilanteissa; ainoastaan sitä ei tiedetä, minkä valinnan kukin pelaaja tekee peliä pelattaessa kussakin tilanteessa.

2) Pelaajat tekevät valintansa toistensa valinnoista tietämättä ja he perustavat valintansa oletuksiinsa muiden pelaajien valinnoista.

Tarkastellaan esimerkkinä **vangin ongelmaa** (dilemma):

Kaksi tietystä rikoksesta epäiltyä on pidätettynä. Poliisilla ei ole varmoja todisteita kummankaan syyllisyydestä ellei jompi kumpi tunnusta. Epäiltyjä pidetään eri selleissä siten, etteivät he voi keskustella keskenään, ja heille selitetään tilanne. Jos kumpikaan ei tunnusta, molemmat saavat yhden kuukauden tuomion (esimerkiksi luvattomasta liikkumisesta yksityisalueella). Jos molemmat tunnustavat, molemmat saavat puolen vuoden tuomion. Jos toinen tunnustaa heidän yhteisen syyllisyytensä ja toinen ei, tunnustaja välttyy tuomiolta ja toinen saa yhdeksän kuukauden tuomion: puoli vuotta rikoksesta ja kolme kuukautta poliisin työn vaikeuttamisesta.

Vangin ongelma voidaan kuvata seuraavana ”kaksoismatriisina” (kaksi numeroa jokaisessa matriisin ”osoitteessa”)

		pelaaja 2	
		K	T
pelaaja 1	K	−1, −1	−9, 0
	T	0, −9	−6, −6

missä strategiat on nimetty kirjaimilla, K kiellä ja T tunnusta, ja pelin tulemat on esitetty pelimatriisissa. Pelaaja 1 pelaa riveillä ja hänen tulemansa eri tilanteissa ovat matriisin lohkojen ensimmäiset numerot, ja lohkojen toiset numerot ovat pelaajan 2 tulemat (pelaa sarakkeilla). Mitä suurempi numero on, sitä korkeampaa ”hyödyn tasoa” se kuvaa (tässä tapauksessa tuomion pituutta kuukausina). Pelaajat pelaavat toistensa ratkaisuista tietämättä ja molemmilla on kaksi strategiaa.

Määritelmä: Normaalimuotoinen peli koostuu n:n pelaajan ($n \geq 2$) strategiajoukoista $S_1, \ldots, S_n$ ja pelaajien tulemajoukoista $u_1, \ldots, u_n$, missä $S_i = \{s_{i1}, \ldots, s_{ik}\}$ on pelaajan i kaikkien mahdollisten strategioiden joukko (k kpl) ja $u_i = \{u_{i1}, \ldots, u_{ip}\}$ on pelaajan i kaikkien mahdollisten tulemien joukko (p kpl, missä p riippuu muiden pelaajien strategioiden lukumääristä). Normaalimuotoisessa pelissä oletetaan lisäksi, että 1) kaikki pelaajat tietävät muut pelaajat ja heidän mahdolliset strategiansa, 2) kaikki pelaajat tietävät kaikkien pelaajien mahdolliset pelin tulemat, 3) jokainen pelaaja tekee valintansa toisten valinnoista tietämättä ja 4) pelin lopputulos määräytyy pelaajien valintojen perusteella yksikäsitteisesti.

Normaalimuotoinen peli voidaan kuvata seuraavana mahdollisten strategioiden ja tulemien joukkona

$$G = \{S_1, S_2, \ldots, S_n; u_1, u_2, \ldots, u_n\}, \tag{1}$$

missä G viittaa peliin (game).

4 Pelin ratkaiseminen

4.1 Aidosti dominoitujen strategioiden iteratiivinen eliminointi (adsie)

Tarkastellaan edellä esitettyä vangin ongelmaa. Oletetaan vangin 1 pelaavan K:ta. Vertaamalla ylärivin tulemia vangin 2 kannattaa pelata strategiaa T. Jos 1 pelaa T:tä, vertaamalla kahta alarivin tulemaa havaitaan, että 2:n kannattaa pelata T:tä. Vangin 2 kannattaa siis aina pelata T:tä. Koska peli on symmetrinen, sama pätee myös vangille 1. Strategia T dominoi siten aidosti strategiaa K molemmilla pelaajilla.

Määritelmä: Olkoon peli normaalimuotoinen ja muotoa (1). Kahdesta pelaajan i strategiasta $s_{ij}, s_{ik} \in S_i$, s_{ij} dominoi aidosti s_{ik}:ta, jos $u_i(s_{ij}) > u_i(s_{ik})$ kaikilla muiden pelaajien mahdollisilla strategioilla $S_1, \ldots, S_{i-1}, S_{i+1}, \ldots, S_n$.

Määritelmä: Rationaalinen pelaaja ei koskaan pelaa sellaista strategiaa, jota jokin toinen strategia aidosti dominoi.

Vangin ongelmassa rationaalinen pelaaja pelaa siis strategiaa T, sillä se dominoi aidosti K:ta. Jos pelaajat ovat rationaalisia ja lisäksi tietävät toistensa olevan rationaalisia, tällä perusteella voimme ennustaa **pelin ratkaisuksi strategiavektoria** (T, T), missä vektorin ensimmäinen alkio on pelaajan 1 strategia. **Pelin tulema on tällöin vektori** $(u_1, u_2) = (-6, -6)$.

Tarkastellaan seuraavaksi, voidaanko pelaajien rationaalisuusoletuksen perusteella ratkaista muitakin pelitilanteita kuin yllä kuvattu. Olkoon meillä peli

		pelaaja 2		
		vasen	keski	oikea
pelaaja 1	ylös	1, 0	1, 2	0, 1
	alas	0, 3	0, 1	2, 0

Pelaajalla 1 on kaksi strategiaa ja pelaajalla 2 kolme. Pelaajalla 1 kumpikaan strategia ei aidosti dominoi toista; sen sijaan 2:lla ”keski” dominoi aidosti strategiaa ”oikea”. Jos 2 on rationaalinen, hän ei koskaan pelaa strategiaa ”oikea”. Jos 1 tietää 2:n olevan rationaalinen, 1 voi eliminoida 2:lta strategian ”oikea”. Tällöin pelimatriisi supistuu muotoon

		pelaaja 2	
		vasen	keski
pelaaja 1	ylös	1, 0	1, 2
	alas	0, 3	0, 1

Nyt pelaajalla 1 strategia ”ylös” dominoi aidosti strategiaa ”alas”. Jos pelaaja 2 tietää pelaajan 1 olevan rationaalinen (ja tietää lisäksi pelaajan 1 tietävän itsensä olevan rationaalinen), 2 voi eliminoida 1:ltä strategian ”alas”. Tällöin pelimatriisi tulee muotoon

		pelaaja 2	
		vasen	keski
pelaaja 1	ylös	1, 0	1, 2

Nyt pelaajalla 2 ”keski” dominoi aidosti strategiaa ”vasen”, joten 1 voi — tietämällä, että 2 on rationaalinen, 2:n tietävän 1:n olevan rationaalinen ja 1:n tietävän 2:n tietävän 1:n olevan rationaalinen — eliminoida 2:lta strategian ”vasen”. Pelin ratkaisuksi saadaan siten strategiavektori *(ylös, keski)* ja pelin tulemaksi tulee vektori $(1, 2)$.

Adsie perustuu pelaajien rationaalisuusoletukseen sekä täydelliseen informaatioon. Näissä oletuksissa on 2 heikkoutta: 1) jokainen iteraatioaskel vaatii lisäoletuksen muiden pelaajien informaatiosta. Jos tätä informaatio-oletusten kasaantumista halutaan välttää, voidaan olettaa olevan yleisesti tunnettua, että pelin pelaajat ovat rationaalisia. 2) Toinen heikkous **Adsie**:ssa on, että sen tuottama ratkaisu on usein karkeata luokkaa.

Esim. Olkoon meillä seuraava peli

		pelaaja 2		
		L	C	R
pelaaja 1	T	0, 4	4, 0	5, 3
	M	4, 0	0, 4	5, 3
	B	3, 5	3, 5	6, 6

Tässä pelissä ei ole aidosti dominoituja strategioita jotka voitaisiin eliminoida, joten **Adsie**:lla ei saada peliä ratkaistua. Seuraavaksi esittelemme pelin **Nash -tasapaino** käsitteen, jonka avulla y.o. peli saadaan ratkaistua. Nash -tasapaino pelin ratkaisuperiaatteena on yleisempi kuin **adsie**. Näin siksi, että jos pelin ratkaisu etsitään Nash -tasapainon avulla on se myös aina **adsie** -periaatteen mukainen ratkaisu. Sen sijaan päinvastainen väite ei päde.

4.2 Pelien ratkaiseminen Nash -tasapainon avulla

Määritelmä: Srategiavektori $({s_1}^*, \ldots, {s_n}^*)$ on n:n pelaajan normaalimuotoisen pelin
$$G = \{S_1, \ldots, S_n; u_1, \ldots, u_n\}$$
Nash -tasapaino, jos jokaisella pelaajalla i, $i = 1, \ldots, n$, ${s_i}^*$ on hänen paras vastastrategiansa peliteorian määrittämille muiden pelaajien kyseisen tilanteen strategioille, $({s_1}^*, \ldots, {s_{i-1}}^*, {s_{i+1}}^*, \ldots, {s_n}^*)$. Toisin sanoen

$$u_i({s_1}^*, \ldots, {s_i}^*, \ldots, {s_n}^*) \geq u_i({s_1}^*, \ldots, s_i, \ldots, {s_n}^*)$$

missä s_i on pelaajan i mikä tahansa muu strategia kuin ${s_i}^*$. Tällöin ${s_i}^*$ voidaan myös ilmaista seuraavan optimointiongelman ratkaisuna

$$\max_{s_i \in S_i} u_i({s_1}^*, \ldots, {s_{i-1}}^*, s_i, {s_{i+1}}^*, \ldots, {s_n}^*);$$

kyseessä on siis pelaajan i tuleman maksimointi oletuksella, että muut pelaajat pelaavat peliteorian tarjoaman ratkaisun mukaista strategiaa.

Koska yllä oleva ehto pätee jokaiselle pelaajalle $i = 1, \ldots, n$, jokainen pelaaja pelaa Nash -tasapainotilanteessa parasta vastastrategiaansa muiden pelaajien peliteorian mukaista strategiaa vastaan. Nash -tasapainotilanteessa kukaan pelaajista ei ole halukas muuttamaan strategiaansa, mistä nimitys tasapaino seuraa.

5 Nash -tasapainon mielekkyys

Oletetaan, että peliteoria tarjoaa normaalimuotoisen pelin ratkaisuksi strategiavektoria $({s_1}', \ldots, {s_n}')$. Jos tämä ei ole Nash -tasapaino, on olemassa pelaaja i, $1 \leq i \leq n$ siten, että ${s_i}'$ ei ole hänen paras vastastrategiansa tilanteessa $({s_1}', \ldots, {s_{i-1}}', {s_{i+1}}', \ldots, {s_n}')$. Ts. löytyy strategia ${s_i}''$ siten, että

$$u_i({s_1}', \ldots, s'_{i-1}, {s_i}'', s'_{i+1}, \ldots, {s_n}') > u_i({s_1}', \ldots, s'_{i-1}, {s_i}', s'_{i+1}, \ldots, {s_n}').$$

Jos siis peliteoria tarjoaa jotakin strategiavektoria pelin ratkaisuksi siten, että ratkaisu ei ole Nash -tasapaino, ainakin yhdellä pelaajalla (yllä pelaaja i) on halu poiketa peliteorian esittämästä ratkaisusta. Tällaisessa tilanteessa pelin pelaaminen käytännössä osoittaa teorian ehdottaman ratkaisun virheelliseksi.

Nash -tasapainon voidaan ajatella toteutuvan joko pelaajien riittävän pitkän pelitilanteen mietiskelyn kautta, tai pelitilanteen toistuessa käytännössä riittävän monta kertaa siten, että pelaajat pyrkivät pelitilanteissa parantamaan aiempaa tulemaansa. Käytännössä pelitilanteita ratkaistaan usein simuloimalla pelitilannetta numeerisesti siten, että rakennetaan pelaajille jokin parannusalgoritmi ja pelataan peliä useita kertoja tarkastellen konvergoituuko peli johonkin tiettyyn ratkaisuun.

Ratkaistaan muutamia pelitilanteita Nash -tasapainon avulla. Kömpelöin ratkaisutapa on käydä läpi jokainen mahdollinen strategiayhdistelmä jokaisella pelaajalla ja tutkia, ovatko ne Nash -tasapainoja. Kahden pelaajan tilanteessa tämä tehdään seuraavasti: määritellään toisen pelaajan paras vastastrategia jokaiselle tarkasteltavan pelaajan strategialle. Kun löydetään strategiapari, jossa molemmat ovat pelaajien parhaat vastastrategiat toisilleen, kyseessä on Nash -tasapaino.

Ratkaistaan edellä esitelty peli Nash -tasapainon avulla (luennolla).

			pelaaja 2	
		L	C	R
pelaaja 1	T	0, 4	4, 0	5, 3
	M	4, 0	0, 4	5, 3
	B	3, 5	3, 5	6, 6

Harj. Ratkaise Vangin ongelma sekä edellä esitelty peli Nash -tasapainon avulla.

6 Nash -tasapainon ja adsie:n välinen yhteys

Toistaiseksi käsitellyissä peleissä on ollut vain yksi Nash -tasapaino. Edellä käsitellyissä peleissä Nash -tasapainot (T, T) ja (*ylös,keski*) ovat ainoat strategiaparit jotka jäävät jäljelle, kun aidosti dominoidut strategiat eliminoidaan iteratiivisesti. Tämä tulos voidaan yleistää: Jos n:n pelaajan normaalimuotoisessa pelissä **adsie** tuottaa ratkaisuksi vain yhden strategiavektorin, on se myös Nash -tasapaino. Edellä havaitsimme, että pelillä saattaa olla Nash -tasapaino, jota **adsie**:lla ei löydetä. **Adsie** jättää jäljelle pelin Nash -tasapainot ja mahdollisesti myös muita strategiavektoreita. Nash -tasapaino on siten **vahvempi** pelin ratkaisuperiaate kuin **adsie**. Nash -tasapainon avulla voidaan ratkaista jokainen peli joka voidaan ratkaista **adsie**:llakin siten, että ratkaisut ovat samat. Tämän lisäksi Nash:illa saadaan ratkaistua myös sellaisia pelejä, joita **adsie**:lla ei voida ratkaista.

John Nash osoitti ("Equilibrium Points in n -Person Games", 1950), että jokaisessa **äärellisessä pelissä** (pelaajien lukumäärä ja strategiajoukot äärellisiä) on vähintään yksi Nash -tasapaino. Nash -tasapaino voi tosin vaatia **sekastrategioiden** (mixed strategies) käyttöä, eli että pelaaja pelaa **puhtaita** strategioitaan jonkin todennäköisyysjakauman mukaisesti.

Esim. Vanki pelaa strategioitaan seuraavasti: T todennäköisyydellä p ja K todennäköisyydellä $1-p$, missä $0 \leq p \leq 1$. Käytännössä voidaan ajatella, että hänellä on esimerkiksi kymmenen kortin pakka, joissa 3:ssa lukee T ja seitsemässä K, ja hän nostaa kortin sekoitetusta pakasta ja pelaa sen mukaisesti. Erisuuri korttipakka ja toinen korttien suhdeluku tuottaa toisen todennäköisyysjakauman.

Esim. Sukupuolten välinen taistelu. Mies ja nainen yrittävät sopia illanvietosta. Heidän on valittava oopperan ja jalkapallo-ottelun välillä. Molemmat haluavat mielummin viettää illan toistensa seurassa kuin yksinään, mutta nainen preferoi oopperaa ja mies jalkapalloa. Oletetaan pelimatriisi seuraavaksi

		mies	
		ooppera	jalkapallo
nainen	ooppera	2, 1	0, 0
	jalkapallo	0, 0	1, 2

Pelin tulemat ovat joko mielihyvätasoja tai rahamääräisiä suureita. Jälkimmäisessä tapauksessa voidaan ajatella, että tulemat ilmaisevat minkä arvoisina pelaajat pitävät kutakin tilannetta. Jos siis nainen menee yksin oopperaan tai jalkapallo-otteluun, hän pitää tilannetta nollan arvoisena, samoin mies. Jos peliteoria tarjoaa pelin ratkaisuksi yksikäsitteistä strategiavektoria, on se aina Nash -tasapaino. Tässä pelissä on kuitenkin kaksi Nash -tasapainoa; (*ooppera, ooppera*) ja (*jalkapallo, jalkapallo*). Tällaisessa tilanteessa peliteoria ei kykene ennustamaan pelin ratkaisua. Myöhemmin osoitamme lisäksi, että sekastrategioiden käyttö tuo peliin myös kolmannen Nash -tasapainon. Tällöin tarkastelemme myös pelin ratkaisemista tilanteessa, jossa pelaajilla on informaatiota toistensa pelaaman sekastrategian todennäköisyysjakaumasta.