

Transitiivisuus säilyy aikadilataatiossa

Mikko I. Malinen*

21. syyskuuta, 2025

1 Esimerkki kolmesta havaitsijasta

Konkreettinen esimerkki kolmesta havaitsijasta

Ajatellaan kolmea havaitsijaa, jotka kulkevat suoraviivaisesti samaan suuntaan:

- **A:** Laboratoriokehys.
- **B:** Liikkuu A:han nähden nopeudella $v = 0.6c$.
- **C:** Liikkuu B:hen nähden nopeudella $u = 0.5c$ samaan suuntaan.

Alla näytän lukuarvoin, miksi “epätransitiivisuus” häviää, kun käytetään oikeaa (Lorentz-kovarianttia) nopeuksien yhdistämistä ja ajansiirrosta.

—
Nopeuksien yhdistäminen

- **A:n näkemä C:n nopeus:** relativistinen yhteenlasku

$$w = \frac{v + u}{1 + \frac{vu}{c^2}} = \frac{0.6c + 0.5c}{1 + 0.6 \cdot 0.5} = \frac{1.1}{1.3}c = \frac{11}{13}c \approx 0.8462c.$$

- **Gamma-kertoimet:**

$$\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

- **A-B:** $\gamma_{AB} = \gamma(0.6c) = \frac{1}{\sqrt{1-0.36}} = \frac{1}{0.8} = 1.25.$
- **B-C:** $\gamma_{BC} = \gamma(0.5c) = \frac{1}{\sqrt{1-0.25}} = \frac{1}{\sqrt{0.75}} \approx 1.1547.$
- **A-C:** $\gamma_{AC} = \gamma(w) = \gamma\left(\frac{11}{13}c\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{121}{169}}} = \frac{13}{4\sqrt{3}} \approx 1.876.$

—
Virheellinen “transitiivisuus” (miksi se näyttää rikkoutuvan)

- **Naivi ketjutus:** jos yrittää väittää, että

$$\gamma_{AC} \stackrel{?}{=} \gamma_{AB} \cdot \gamma_{BC},$$

*Tulos saatu Microsoft Copilot:ista

saadaan

$$\gamma_{AB}\gamma_{BC} \approx 1.25 \times 1.1547 \approx 1.443,$$

mikä ei vastaa $\gamma_{AC} \approx 1.876$. Tämä on se näennäinen ristiriita.

- **Mistä se tulee:** pelkkä “dilataatioiden kertolasku” jättää huomioimatta suhteellisuuden olennaisen tekijän, eli samanaikaisuuden suhteellisuuden. Ajanmuunnos kehyksestä toiseen sisältää myös paikkatermin, joka on verrannollinen nopeuksien tuloon $\frac{vu}{c^2}$.

—
Oikea koostokaava ajalle (ratkaisee ristiriidan)

Tarkastellaan kahta tapahtumaa C:n maailmaviivalla. Olkoon C:n oma aika näiden välillä $\Delta\tau_C$. Tällöin:

- **B:ssä mitattu aika:** $\Delta t_B = \gamma_{BC} \Delta\tau_C$.

- **B:ssä mitattu paikkaero:** $\Delta x_B = u \Delta t_B$ (koska tapahtumat ovat C:n viivalla, joka liikkuu B:ssä nopeudella u).

Ajan Lorentz-muunnos B:stä A:han on

$$\Delta t_A = \gamma_{AB} \left(\Delta t_B + \frac{v \Delta x_B}{c^2} \right) = \gamma_{AB} \Delta t_B \left(1 + \frac{vu}{c^2} \right).$$

Sijoittamalla $\Delta t_B = \gamma_{BC} \Delta\tau_C$ saadaan

$$\Delta t_A = \gamma_{AB} \gamma_{BC} \left(1 + \frac{vu}{c^2} \right) \Delta\tau_C.$$

- **Avaintermi:** $\left(1 + \frac{vu}{c^2} \right)$ on juuri se “puuttuva” kerroin, joka tulee samanaikaisuuden suhteellisuudesta.

Lasketaan se numeroilla:

$$\gamma_{AB} \gamma_{BC} \left(1 + \frac{vu}{c^2} \right) = 1.25 \times 1.1547 \times (1 + 0.6 \cdot 0.5) = 1.25 \times 1.1547 \times 1.3 \approx 1.876,$$

joka täsmää γ_{AC} kanssa. Tarkalleen rationaalisilla arvoilla:

$$\gamma_{AB} \gamma_{BC} \left(1 + \frac{vu}{c^2} \right) = \frac{5}{4} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{13}{10} = \frac{13}{4\sqrt{3}} = \gamma \left(\frac{11}{13} c \right).$$

—
Konkreettiset kellot (1 vuoden tikki C:ssä) - **Lähtöehto:** C:n kellossa kuluu omaa aikaa $\Delta\tau_C = 1$ vuosi.

- **B:n mittaama:** $\Delta t_B = \gamma_{BC} \Delta\tau_C \approx 1.1547$ vuotta.

- **A:n mittaama suoraan:** $\Delta t_A = \gamma_{AC} \Delta\tau_C \approx 1.876$ vuotta.

- **A:n mittaama B:n kautta:** $\Delta t_A = \gamma_{AB} \left(\Delta t_B + \frac{v \Delta x_B}{c^2} \right)$ ja $\Delta x_B = u \Delta t_B$, joten

$$\Delta t_A = \gamma_{AB} \Delta t_B \left(1 + \frac{vu}{c^2} \right) \approx 1.25 \times 1.1547 \times 1.3 \approx 1.876 \text{ vuotta.}$$

Molemmat tavat antavat saman tuloksen.

Johtopäätös

- **Keskeinen opetus:** Aikadilataatio ei “ketjuunnu” pelkkänä gamma-kertoimien tulona. Oikea yhdistelmä sisältää tekijän $(1 + \frac{vu}{c^2})$, joka juontuu samanaikaisuuden suhteellisuudesta. - **Transitiivisuus säilyy:** Kun käytetään Lorentzin nopeuksien yhdistämistä ja täyttä aikamuunnosta, A:n, B:n ja C:n mittaukset ovat täsmälleen konsistentteja.