

# **Värispektrien optimaalinen näytteenotto**

**Juha Lehtonen**

6.9.2004

Joensuun yliopisto  
Tietojenkäsittelytiede  
Pro gradu -tutkielma



## TIIVISTELMÄ

Väriä käsitellään usein kolmella arvolla, esimerkiksi RGB-arvoilla. Värin esittäminen tällaiseen ei kuitenkaan aina riitä, sillä on olemassa tilanteita, missä ihminen ei erota kahden eri kohteen väriä toisistaan tietyssä valaistuksessa. Valaistusta muutettaessa väriero voidaan kuitenkin havaita. Lisäksi tällaiset esitykset ovat laiteriippuvaisia ja hankalia käsitellä valaistuksen muuttuessa. Väristä voidaan fysikaalisesti mitata värispektri, eli valon intensiteetti aallonpituuden funktiona. Värispektrit vievät kuitenkin runsaasti levytilaa ja niiden tarkka mittaaminen on usein hidasta.

Tässä tutkielmassa etsitään optimaalinen näytteenotto värispektreille. Tasavälisessä näytteenotossa etsitään näytteenottoväli tarkastelemalla värispektrin energiaa eri taajuuksilla sekä tavallisilla virhemitoilla. Tutkielmassa keskitytään myös Lagrangen interpolointiin perustuvaan menetelmään, eri integrointimenetelmien tarkkuuteen sekä eri tapoihin laskea värispektreistä tristimulusarvot. Lisäksi tutustutaan värispektrien kanavien välisiin korrelaatioihin sekä laskeaan pääkomponenttianalyysin avulla tarvittava kantavektorien määrä, joka esittää värispektrisarjan kelvollisesti pienemmällä määrällä parametreja. Uutena menetelmänä esitetään epätasavälinen näytteenotto, mikä valitsee värispektrien kanavat parametrina annettavan painofunktion mukaisesti.

Tutkielma koostuu teoreettisen osan lisäksi kokeellisesta osasta, jossa vertaillaan eri menetelmien avulla värispektrien virheellisyyttä näytteenoton muuttuessa. Tutkielmassa esitetään optimaalinen tasavälinen näytteenotto eri spektrisarjoille taajuustason mittauksen ja virheanalyysin perusteella. Lisäksi epätasavälisessä näytteenotossa todetaan, että opponentiväriteoriaan ja värispektrien kanavien väliseen korrelaatioon perustuvien painofunktioiden avulla voidaan tietyille testisarjoille saavuttaa pienempi virhe tasaväliseen näytteenottoon nähden.

**ACM-luokat** (ACM Computing Classification System, 1998 version): G.1.1 - G.1.4, G.1.9.

**Avainsanat:** energia, integrointi, interpolointi, korrelaatio, näytteenotto, painofunktio, pääkomponenttianalyysi, taajuus, tristimulusarvot, virheanalyysi, väri, värispektri.

## ESIPUHE

Olen kirjoittanut tämän pro gradu -tutkielman Joensuun yliopistossa tietojenkäsittelytieteen laitoksella kevätlukukaudella ja kesällä 2004 opiskellen samalla signaalinkäsittelyn opintoja. Haluan kiittää työni ohjaajaa professori Jussi Parkkista kärsivällisestä ja erinomaisesta opastuksesta sekä arvokkaista kommentteista. Lisäksi haluan kiittää työni toista tarkastajaa professori Timo Jääskeläistä hyvistä neuvoista. Haluan antaa kiitokset myös väritutkimusryhmälle henkisestä tuesta ja kannustuksesta.

Lisäksi haluan kiittää vanhempiani, sukulaisiani ja ystäviäni, jotka ovat rohkaisseet minua tämän työn teossa. Lopuksi vielä erityiskiitokset avopuolisolleni Kaisalle hänen kannustuksestaan ja kärsivällisyydestään.

Joensuussa 6.9.2004

Juha Lehtonen

# SISÄLLYSLUETTELO

|   |           |
|---|-----------|
| <b>1. JOHDANTO</b>  | <b>1</b>  |
| <b>2. KÄSITTEITÄ</b>  | <b>6</b>  |
| 2.1 Diskreetit integrointimenetelmät                        | 6         |
| 2.2 Lagrangen interpolointimenetelmä                        | 7         |
| 2.3 Fourier-muunnos   | 7         |
| 2.4 Värikoordinaatistomuunnokset                            | 7         |
| 2.4.1 XYZ-koordinaatisto                                    | 8         |
| 2.4.2 L*a*b*-koordinaatisto                                 | 8         |
| 2.4.3 YC <sub>b</sub> C <sub>r</sub> -koordinaatisto        | 9         |
| 2.4.4 sRGB-koordinaatisto                                   | 10        |
| 2.5 Värispektri ja valonlähde                               | 10        |
| 2.6 Virhekaavat   | 10        |
| <b>3. OPTIMAALISEN NÄYTTEENOTON MITTAUS</b>                 | <b>13</b> |
| 3.1 Integraalimenetelmä                                     | 13        |
| 3.2 Taajuustason mittaus                                    | 15        |
| 3.3 Korrelaatiomatriisimenetelmä ja pääkomponenttianalyysi  | 18        |
| 3.4 Uusi menetelmä CIE-värisovitusfunktioiden laskemiseksi  | 20        |
| 3.5 Epätasavälinen näytteenotto                             | 23        |
| <b>4. TESTIAINEISTO</b>                                     | <b>29</b> |
| <b>5. TULOKSET</b>  | <b>31</b> |
| 5.1 Värispektrin harventaminen                              | 31        |
| 5.2 Integraalimenetelmä                                     | 32        |
| 5.3 Taajuustason mittaus                                    | 35        |
| 5.4 $\Delta E$ -virhe                                       | 39        |
| 5.5 Pinta-alaero valituilla näytteenottoväleillä            | 45        |
| 5.6 Ihmisen silmän herkkyyssäyrä                            | 46        |
| 5.7 Eri virhemitat ja metameria                             | 52        |
| 5.8 Taajuusrajoitettu värispektri                           | 56        |
| 5.9 Korrelaatiomatriisimenetelmä ja pääkomponenttianalyysi  | 59        |
| 5.10 Uusi menetelmä CIE-värisovitusfunktioiden laskemiseksi | 67        |
| 5.11 Epätasavälinen näytteenotto                            | 71        |

|                            |           |
|----------------------------|-----------|
| <b>6. YHTEENVETO</b>       | <b>86</b> |
| 6.1 Työn kulku             | 86        |
| 6.2 Tulosten analysointi   | 86        |
| 6.1 Jatkotutkimus          | 92        |
| 6.2 Yleiset johtopäätökset | 93        |

|                      |           |
|----------------------|-----------|
| <b>VIITELUETTELO</b> | <b>95</b> |
|----------------------|-----------|

## **LIITTEET**

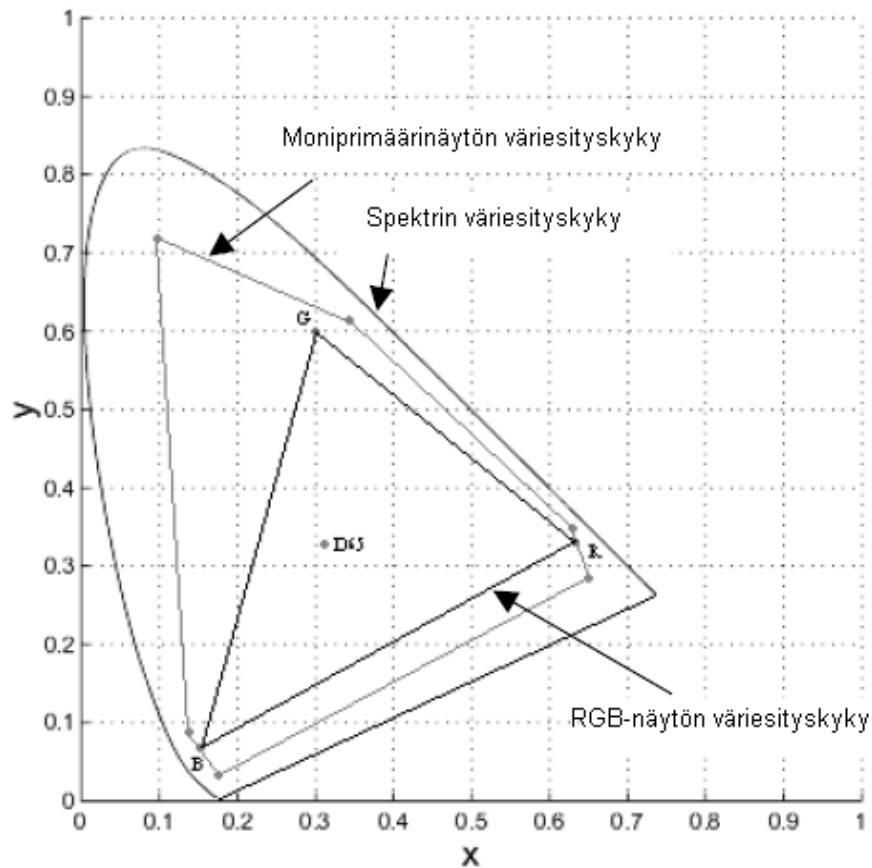
1. Algoritmi kanava-arvojen sijainnin laskemiseksi.
2. Eri näytteenottovälejä vastaavat kanavien lukumäärät Munsell-sarjoille.

# 1. JOHDANTO

*Väri* on silmän kautta tuleva aistimus kohteen lähettämästä, kohteesta heijastuneesta tai kohteen läpisevästä valosta (jatkossa puhutaan kuitenkin vain heijastumisesta). Valonlähde valaisee kohteen, mistä osa heijastuu silmään siten, että tämä koetaan värinä. Tällöin kohteen sanotaan olevan tietyn värinen. Valo on luonteeltaan aaltoliikettä, jolloin heijastuneesta valosta voidaan fysikaalisesti mitata esimerkiksi valon intensiteetti aallonpituuden funktiona, ja syntyneitä funktiota kutsutaan *värispektriksi*. Värispektri on siten esitys sitä, kuinka paljon valoa heijastuu kohteesta eri aallonpituuksilla [16].

Väriä käsitellään yleisesti kolmen arvon esityksenä, esimerkiksi *RGB*-esityksenä, missä väri koostuu punaisesta, vihreästä ja sinisestä komponentista. Värin esitys kolmella arvolla ei kuitenkaan riitä, sillä se aiheuttaa epätarkkuutensa vuoksi useita eri ongelmia. Yksi tällainen ongelma on *metameria*, missä ihminen ei tietyssä valaistuksessa erota kahden eri kohteen väriä toisistaan. Valaistusta kuitenkin muuttaessa kohteiden välinen väriero voidaan havaita. Lisäksi esitykset kolmella arvolla ovat laiteriippuvaisia ja hankalia käsitellä valaistuksen muuttuessa [23]. Esimerkiksi tietokoneen näytön värit perustuvat usein *RGB*-tekniikkaan ja niitä on hankala säätää varsinkin, jos ympäröivä valaistus muuttuu jatkuvasti.

Kuvassa 1.1 on esitetty ihmisen näkemältä alueelta (380...780 nm) mitatun värispektrin väriesityskyky (hevosenkenkä), mikä sisältää tyypillisen tietokoneen näytön *RGB*-väriesityskyvyn (kolmio). Näytöllä ei voi esittää kolmion ulkopuolella sijaitsevia värejä. Edellä esitettyjä ongelmia voidaan välttää käyttämällä kolmen arvon esityksen sijaan fysikaalisesti mitattua digitaaliseksi muunnettua värispektriä. Tällainen värispektri muodostetaan ottamalla analogisesta värispektristä mittauslaitteella näytteet sopivalla näytteenottovälillä, esimerkiksi 380...780 nm alueelta aina 5 nm välein, jolloin yksi värispektri esitetään digitaalisesti 81 *kanava-arvolla*. Tavallisella tietokoneella ei vielä voida esittää digitaalista värispektriä värinä, mutta tätä varten on jo kehitetty uusia näyttölaitteita. Moniprimäärinäytön [1] väriesityskyky (monikulmio kuvassa 1.1) on huomattavasti suurempi kuin perinteisen *RGB*-tekniikkaan perustuvan näytön. Siinä väri esitetään kuudella päävärillä.



Kuva 1.1: Värispektrin, moniprimäärinäytön ja RGB-näytön väriesityskyky CIE 1931  $xy$  -värikoordinaatistossa.

Digitaalinen kuva koostuu useasta kuvapistestä eli *pikselistä*. Vastaavasti *värispektrikuvan* pikselit ovat värispektrejä. Tästä on seurauksena, että värispektrikuvat ja värispektrisarjat vievät runsaasti levytilaa, eikä niitä voida siirtää nopeasti nykyisissä tietoverkoissa. Lisäksi värispektrien tarkka mittaus ( $\sim 1$  nm näytteenottoväli) vie runsaasti aikaa, mikä aiheuttaa varsinkin muuttuvissa olosuhteissa, kuten ulkona auringonvalossa, mittaamiseen suuria vaikeuksia.

Värispektrien mallintamiseen on kehitetty useita eri menetelmiä, jossa spektri esitetään pienemmällä parametrien määrällä. Alun perin tutkimus on lähtenyt ajatuksesta, jossa eri värispektrejä arvioidaan suoraan matemaattisilla funktioilla, kuten polynomeilla [22]. Vastaavasti menetelmiä kolmen arvon esitysten palauttamiseksi värispektreiksi on esitetty useita, kuten arviointi suoraan jollakin matemaattisella funktiolla [4], taajuustason muunnoksella (Fouriermuunnos) [27] tai muodostamalla metameerinen värispektrien joukko, josta valitaan sopivin spektri [23]. Pääkomponenttianalyysissä värispektrisarjan spektrit saadaan esitettyä spektrisarjan ominaisvektorien avulla. Tällä menetelmällä saavutetaan yleensä riittävä tarkkuus jo 4...8 ominaisvektorilla [14, 24]. Spektrien ja eri kolmiarvoesitysten keskinäisiin korrelaatioihin perustuvia menetelmiä virhemittana on esitetty useassa lähteessä [6, 8]. Lisäksi on olemassa me-



netelmiä värispektrikuvien kompressoimisesta pienempään tilaan esimerkiksi pääkomponenttianalyysiin ja JPEG-tyyppiseen pakkaukseen [11, 19] sekä wavelet-muunnokseen [15] perustuen.

Värispektrejä on totuttu mittaamaan ihmiselle näkyvän valon alueelta 5 nm tai 10 nm välein, joskus jopa 20 nm välein. Tähän vaikuttavat mm. taloudelliset syyt, sillä edulliset mittauslaitteet pystyvät yleensä mittaamaan värispektrin enintään 10 nm mittaustarkkuudella. Varsinaista näytteenottoa on yleisesti tutkittu *taajuustasossa*, koska käytettävien kanava-arvojen määrä on suoraan verrannollinen värispektrin taajuuteen, ja siten myös näytteenottoväli on kääntäen verrannollinen värispektrin taajuuksiin nähden. Tämä todistetaan myöhemmin kaavassa 3.9. Taajuustasossa värispektri esitetään aallonpituuden käänteisfunktiona, jonka suurena on paikkataajuus (jatkossa lyhyesti taajuus) ja yksikkönä  $1/nm$  tai *sykliä/nm*.

Seuraavassa on esitelty eri tutkimuksien tuloksia sopivaksi rajataajuudeksi. Kaikki nämä tulokset on myös tiivistetty taulukkoon 1.1, johon on lisätty myös taajuuksia vastaavat näytteenottovälit. *Buchsbaum & Gottschalk* [5] analysoivat CIE-värisovitusfunktiot 380...700 nm alueelta (funktioiden näytteenottoväli 1 nm) ja laskivat 0,01...0,02 sykliä/nm riittäväksi rajataajuudeksi, minkä jälkeen ei energiaa komponenteilla enää juurikaan esiinny. *Romero et al.* [25] myös tutkivat CIE-värisovitusfunktioiden rajataajuudet, nyt 360...759 nm alueelta (näytteenottoväli 1 nm) ja saivat vastaavasti x- ja y-komponenteille 0,02 sykliä/nm sekä z-komponentille 0,04 sykliä/nm.

*Stiles et al.* [28] ehdottavat, että riittävä rajataajuus luonnollisille värispektreille (400...700 nm alueelta 10 nm näytteenottoväli) useaan tarkoitukseen on 0,01...0,02 sykliä/nm. *Maloney* [21] osoitti Nickerson-Munsell -sarjan (462 värispektriä, mitattu 400...700 nm alueelta, 10 nm näytteenottoväli) ja Krinovin näytteiden (337 värispektriä, mitattu 400...650 nm alueelta, 10 nm näytteenottoväli) avulla, että heijastusspektrien energiasta yli 99,0% säilyy, kun taajuus rajoitetaan 0,01 sykliin/nm. *Van Hateren* [29] käytti tutkimuksessaan 138 luonnollista näytettä (puiden rungoista, tiilistä, maasta, ledistä, pilvistä ja kukista) ja sai rajataajuudeksi n. 0,02 sykliä/nm. *Bonnardel & Maloney* [3] käyttivät yli 1500 luonnosta mitattua heijastusspektriä (hedelmistä, lehdistä ja kukista, 300...700 nm alueelta, 1 nm näytteenottoväli) ja laskivat 99,0% energian rajataajuudeksi 0,0133 sykliä/nm. Lisäksi he laskivat erilaisille päivänvalonlähteille (400...700 nm alueelta, 5 nm näytteenottoväli) rajataajuuden 0,0033 sykliä/nm. Kun värispektrin tarkkuudeksi vaadittiin 99,9% energiasta, he saivat heijastusspektreille rajataajuudeksi 0,0367 sykliä/nm ja päivänvaloille 0,01 sykliä/nm.

Taulukko 1.1: Rajataajuudet ja niitä vastaavat näytteenottovälit eri tutkimuksissa.

| Viite | Tutkimusaineisto  | Rajataajuus (sykliä/nm)                    | Rajataajuutta vastaava näytteenottoväli (nm) |
|-------|---|--|--|
| [5]   | CIE-värisovitusfunktiot (380...700 nm, 1 nm näytteenottoväli)   | 0,01...0,02                                | 25...50                                      |
| [25]  | CIE-värisovitusfunktiot (360...759 nm, 1 nm näytteenottoväli)   | 0,02...0,04                                | 12...25                                      |
| [28]  | Luonnolliset spektrit (400...700 nm, 10 nm näytteenottoväli)  | 0,01...0,02                                | 25...50                                      |
| [21]  | Nickerson-Munsell (400...700 nm, 10 nm näytteenottoväli) ja Krinov (400...650 nm, 10 nm näytteenottoväli) | 0,01                                       | 50   |
| [29]  | Näytteitä luonnosta   | 0,02                                       | 25   |
| [3]   | Luonnolliset spektrit, 99,0%-raja   | 0,0133                                     | 37   |
|       | Luonnolliset spektrit, 99,9%-raja (300...700 nm, 1 nm näytteenottoväli)                                   | 0,0367                                     | 13   |
|       | Päivänvalo, 99,0%-raja  | 0,0033                                     | 151  |
|       | Päivänvalo, 99,9%-raja (400...700 nm, 5 nm näytteenottoväli)  | 0,01                                       | 50   |
| [26]  | Päivänvalonlähteet (400...700 nm, 5 nm näytteenottoväli) sekä heijastuspektrit                            | 0,016, loistelampuille korkea rajataajuus. | 31, loistelampuille pieni näytteenottoväli.  |

Romero *et al.* [26] käyttivät 40 luonnollista päivänvalonlähdettä ja keinotekoisina valoina standardivalonlähteitä A, F2, F7 ja F11 sekä tavallista loistelamppua. Nämä valaistukset mitattiin 400...700 nm alueelta 5 nm näytteenottovälillä. Lisäksi he käyttivät 170 heijastusspekttriä, jotka he jakoivat luonnollisten (96 kpl) ja keinotekoisien (74 kpl) näytteiden ryhmiin. Tutkimuksessa tutkittiin erästä parabolista suodinta. He toteavat, että suotimen kanssa heijastuspektreille päivänvalon ja A-valonlähteen kanssa riittää rajataajuudeksi 0,016 sykliä/nm. Sen sijaan he eivät esittäneet rajataajuutta värispektreille F-valonlähteiden kanssa, koska suotimen avulla ei saatu lainkaan kelvollisia tuloksia. Kuitenkin heidän mukaansa F11-valonlähteen spektristä ilman suodinta säilyy vain 78% energiasta vielä 0,04 sykliä/nm rajataajuudella, kun taas päivänvalolla ja A-valonlähteellä päästään 99,0% energiarajan yli jo 0,013 sykliä/nm rajataajuudella. Tämä oli käsittelemistäni viitteistä ainoa, joka ilmaisi tarpeen yli 0,04 sykliä/nm tarkkuudesta (alle 12 nm näytteenottovälistä).

Tässä tutkielmassa etsitään optimaalinen tasavälinen näytteenottoväli värispektrien esitykselle diskreetin integrointilaskennan, värispektrin taajuuksien, virheanalyysin ja korrelaatiomatrii-

sin avulla. Työssä myös tutkitaan värispektrien esitykseen tarvittavien ominaisvektorien lukumäärää pääkomponenttianalyysillä sekä esitellään *Li et al.* [20] kehittämä uusi menetelmä CIE-värisovitusfunktioiden laskemiseksi. Lisäksi työssä selvitetään epätasavälistä näytteenottoa erilaisilla aallonpituusvälin painofunktioilla, kuten ihmisen silmän herkkyyssäyrään, värispektrin derivaattaan, korrelaatioon sekä opponenttiväriteoriaan perustuvien käyrien avulla.

Tutkielman *luvussa 2* käydään läpi yleisiä käsitteitä, joita tässä tutkielmassa tarvitaan. *Luvussa 3* esitetään menetelmiä optimaalisen näytteenottovälin selvittämiseksi. Kokeellinen osuus alkaa *luvusta 4*, missä esitellään käytetty testiaineisto. *Luvussa 5* käsitellään menetelmien tuloksia testiaineistoa käyttäen. Lopuksi *luvussa 6* kootaan eri menetelmät ja tulokset yhteen.

## 2. KÄSITTEITÄ

Tässä luvussa käydään läpi tutkielmassa käytettäviin menetelmiin liittyviä yleisiä käsitteitä. Niitä ovat eri diskreetit integrointimenetelmät, Lagrangen interpolointimenetelmä, Fourier-muunnos, tarvittavat värikoordinaatistomuunnokset, valonlähteen yhdistäminen värispektriin keinotekoisesti ja tutkielmassa käytetyt virhekaavat.

### 2.1 Diskreetit integrointimenetelmät

Diskreetissä matematiikassa integraali voidaan laskea useilla eri tavoilla. Yhteistä eri menetelmille on funktion jakaminen osaväleihin ja pinta-alan laskeminen jokaiselle osavälille erikseen. Yksinkertaisia menetelmiä ovat *Riemannin yläsumma* (kaava 2.1), *Riemannin alasumma* (kaava 2.2), *puolisuunnikassääntö* (kaava 2.3) sekä *Simpsonin sääntö* (kaava 2.4). Näissä kaavoissa  $f$  on integroitava funktio välillä  $[x_0, x_m]$ ,  $m \in \mathbb{N}$  on osavälien lukumäärä ja  $\Delta$  on osavälin pituus. Simpsonin kaavassa (2.4)  $m$  on parillinen. Menetelmiä on muitakin, monipuolinen teoreettinen katsaus käydään viitteessä [9].

$$\int_{x_0}^{x_m} f(x) dx = \sum_{i=1}^m \max(f(x)) \Delta, \text{ missä } x_{i-1} \leq x \leq x_i \quad (2.1)$$

$$\int_{x_0}^{x_m} f(x) dx = \sum_{i=1}^m \min(f(x)) \Delta, \text{ missä } x_{i-1} \leq x \leq x_i \quad (2.2)$$

$$\int_{x_0}^{x_m} f(x) dx = \sum_{i=1}^m \frac{\Delta}{2} [f(x_{i-1}) + f(x_i)] \quad (2.3)$$

$$\int_{x_0}^{x_m} f(x) dx = \sum_{i=1}^{\frac{m}{2}} \frac{\Delta}{3} [f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})] \quad (2.4)$$

Riemannin ylä- ja alasumma lasketaan osavälin ja funktion paikallisen maksimin/minimin avulla. Puolisuunnikassääntö huomioi osavälin molemmat päädyt tehden puolisuunnikkaan, jolloin tulos on tarkempi (kokonaisvirhe  $O(\Delta^2)$ , missä  $O$  tarkoittaa kertaluokkaa). Simpsonin kaava vielä hieman käyristää puolisuunnikkaan funktion puoleista sivua ja antaa siten vielä tarkemman tuloksen (kokonaisvirhe  $O(\Delta^4)$ ), tosin osavälien lukumäärän tulee olla parillinen. Puolisuunnikassäännölle arvioitu kokonaisvirhe  $\epsilon$  voidaan esittää kaavalla (2.5) ja Simpsonin säännölle kaavalla (2.6) [9].

$$\epsilon = \frac{x_0 - x_m}{12} \Delta^2 f^{(2)}(\xi) = O(\Delta^2), \text{ missä } x_0 \leq \xi \leq x_m \quad (2.5)$$

$$\epsilon = \frac{x_0 - x_m}{180} \Delta^4 f^{(4)}(\xi) = O(\Delta^4), \text{ missä } x_0 \leq \xi \leq x_m \quad (2.6)$$

## 2.2 Lagrangen interpolointimenetelmä

*Interpoloinnilla* arvioidaan funktion tunnettujen arvojen välillä olevia tuntemattomia arvoja. *Lagrangen interpolointimenetelmä* on esitetty alla kaavassa (2.7). Kaavaa käytettäessä tulee määrätä sille jokin sopiva interpolaatioaste  $h$ . Funktiolla  $f$  tulee olla tunnetut arvot pisteissä  $x_j$ , missä  $j = 0, 1, \dots, h$ .

$$f(x) = \sum_{k=0}^h \prod_{i=0; i \neq k}^h \frac{x - x_i}{x_k - x_i} f(x_k) \quad (2.7)$$

Fairman [7] esittää, että laskettaessa tristimulusarvoja  $X$ ,  $Y$  ja  $Z$  (ks. luku 2.4.1), käytetyt spektrit ja herkkyysfunktiot tulee interpoloida 1 nm tarkkuuteen Lagrangen interpolointimenetelmällä, missä aste  $h = 3$ . Tällöin laskettavaan arvoon huomioidaan kaksi edellistä ja seuraavaa tunnettua arvoa. Poikkeuksena ovat kuitenkin värispektrin ensimmäisen ja viimeisen välin interpoloinnit, missä asteen suuruus  $h = 2$ . Jatkossa käytetään tästä Fairmanin esittämästä menetelmästä nimitystä *Fairmanin interpolointi*.

## 2.3 Fourier-muunnos

Signaali voidaan muuttaa taajuustasoon *Fourier-muunnoksen* avulla. Olkoon  $f(t)$  jatkuva signaali. Tällöin sen Fourier-muunnos  $F(\omega)$  määritellään kaavalla (2.8). Vastaavasti jatkuvan diskreetin signaalin  $f(x)$  Fourier-muunnos  $F(\omega)$  määritellään kaavalla (2.9). Näissä kaavoissa  $\omega$  on kulmataajuus ja  $i$  on imaginaariyksikkö. Taajuustasossa signaali määritellään sini- ja kosini-funktioiden avulla, sillä  $e^{i\omega} = \cos(\omega) + i \sin(\omega)$ . Fourier-muunnosta ja sen sovellutuksia on esitelty laajasti viitteessä [13].

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (2.8)$$

$$F(\omega) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x}, \text{ missä } x \in \mathbb{Z} \quad (2.9)$$

## 2.4 Värikoordinaatistomuunnokset

Väri esitetään usein kolmella eri komponentilla. Komponenttien merkitys on kuitenkin eri koordinaatistoissa erilainen. Tässä tutkielmassa väri joudutaan joissakin tilanteissa muutta-

maan värispektristä  $XYZ$ -,  $L^*a^*b^*$ -,  $YC_bC_r$ - tai  $sRGB$ -koordinaatistoon. Eri koordinaatistomuunnoksia on käsitelty tarkemmin viitteissä [2, 10, 30].

#### 2.4.1 $XYZ$ -koordinaatisto

$XYZ$ -koordinaatisto on  $CIE$ :n (*Commission Internationale de l'Éclairage*) vuonna 1931 vahvistama värikoordinaatistojärjestelmä.  $CIE$ -tristimulusarvot määritellään seuraavasti:

$$\begin{aligned} X &= k \int s(\lambda) \bar{x}(\lambda) d\lambda \\ Y &= k \int s(\lambda) \bar{y}(\lambda) d\lambda \\ Z &= k \int s(\lambda) \bar{z}(\lambda) d\lambda \end{aligned} \quad (2.10)$$

missä kerroin  $k = 100 / \int s_i(\lambda) \bar{y}(\lambda) d\lambda$  sekä  $\bar{x}(\lambda)$ ,  $\bar{y}(\lambda)$  ja  $\bar{z}(\lambda)$  ovat yleisesti määritellyjä  $CIE$  1931 värisovitusfunktioita [30]. Kertoimessa  $k$  termi  $s_i(\lambda)$  on sen valonlähteen spektri, joka aiheuttaa kohteesta heijastuneen värispektrin  $s(\lambda)$ . Käytännössä joudutaan turvautumaan määritelmän diskreettiin vastineeseen:

$$\begin{aligned} X &= k \sum_{i=1}^n s(\lambda_i) \bar{x}(\lambda_i) \\ Y &= k \sum_{i=1}^n s(\lambda_i) \bar{y}(\lambda_i) \\ Z &= k \sum_{i=1}^n s(\lambda_i) \bar{z}(\lambda_i) \end{aligned} \quad (2.11)$$

missä kerroin  $k = 100 / \sum_{i=1}^n s_i(\lambda_i) \bar{y}(\lambda_i)$  ja  $n$  on värispektrin kanava-arvojen lukumäärä. Tässä tutkielmassa  $XYZ$ -avaruutta tarvitaan eri koordinaattimuunnosten laskentaan. Integraalin laskenta voidaan toteuttaa tässä esitetyn standardimenetelmän lisäksi myös Fairmanin interpoloinnin (ks. luku 2.2) avulla sekä Simpsonin säännöllä (ks. luku 2.1).

#### 2.4.2 $L^*a^*b^*$ -koordinaatisto

Teollisuudessa käytetään yleisesti  $CIE$   $L^*a^*b^*$ -koordinaatistoa, missä  $L^*$ -komponentti esittää värin kirkkauden,  $a^*$ -komponentti värit vihreästä punaiseen ja  $b^*$ -komponentti värit sinisestä keltaiseen. Tässä tutkielmassa  $L^*a^*b^*$ -avaruutta tarvitaan  $\Delta E$ -virheen (esitellään luvussa 2.6) laskentaan. Määritelmä  $XYZ$ -avaruudesta  $L^*a^*b^*$ -avaruuteen on seuraava:

$$L^* = \begin{cases} 116 \left(\frac{Y}{Y_l}\right)^{\frac{1}{3}} - 16, & \text{kun } \frac{Y}{Y_l} > 0,008856 \\ 903,3 \frac{Y}{Y_l}, & \text{muulloin} \end{cases} \quad (2.12)$$

$$a^* = 500 \left[ f\left(\frac{X}{X_l}\right) - f\left(\frac{Y}{Y_l}\right) \right]$$

$$b^* = 200 \left[ f\left(\frac{Y}{Y_l}\right) - f\left(\frac{Z}{Z_l}\right) \right]$$

missä

$$f\left(\frac{X}{X_l}\right) = \begin{cases} \left(\frac{X}{X_l}\right)^{\frac{1}{3}}, & \text{kun } \frac{X}{X_l} > 0,008856 \\ 7,787 \frac{X}{X_l} + \frac{16}{116}, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

$$f\left(\frac{Y}{Y_l}\right) = \begin{cases} \left(\frac{Y}{Y_l}\right)^{\frac{1}{3}}, & \text{kun } \frac{Y}{Y_l} > 0,008856 \\ 7,787 \frac{Y}{Y_l} + \frac{16}{116}, & \text{muulloin.} \end{cases} \quad (2.13)$$

$$f\left(\frac{Z}{Z_l}\right) = \begin{cases} \left(\frac{Z}{Z_l}\right)^{\frac{1}{3}}, & \text{kun } \frac{Z}{Z_l} > 0,008856 \\ 7,787 \frac{Z}{Z_l} + \frac{16}{116}, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Tässä edelleen  $X$ ,  $Y$  ja  $Z$  ovat näytteen XYZ-esityksen komponentit sekä  $X_l$ ,  $Y_l$  ja  $Z_l$  valitun standardivalonlähteen esittämän valkoisen valon komponentit.

#### 2.4.3 $Y C_b C_r$ -koordinaatisto

$Y C_b C_r$ -koordinaatisto on perustana JPEG-kuville ja MPEG-videoille. Koordinaatiston  $Y$ -komponentti esittää harmaasävyä,  $C_b$  ja  $C_r$  taas esittävät itse värin. Muunnos tapahtuu kaavan (2.14) mukaisesti, missä väri muutetaan XYZ-avaruudesta RGB-avaruuden kautta  $Y C_b C_r$ -koordinaatistoon.

$$\begin{bmatrix} Y \\ C_b \\ C_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,299 & 0,587 & 0,114 \\ -0,169 & -0,331 & 0,500 \\ 0,500 & -0,419 & -0,081 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2,3647 & -0,8966 & -0,4681 \\ -0,5153 & 1,4264 & 0,0888 \\ 0,0052 & -0,0144 & 1,0092 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

$$= \begin{bmatrix} 0,4052 & 0,5676 & 0,0272 \\ -0,2265 & -0,3278 & 0,5543 \\ 1,3978 & -1,0448 & -0,3530 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

#### 2.4.4 sRGB-koordinaatisto

Tietokoneella ei voida esittää värispektriä tarkasti värinä, jolloin tässä tutkielmassa esitetyt värit ovat vain suuntaa antavia spektrin sRGB-esityksiä. Muunnos XYZ-avaruudesta sRGB-avaruuteen esitetään kaavan (2.15) mukaisesti. Lisäksi RGB-esitykseen tehdään gammakorjaus (kaava 2.16).

$$\begin{bmatrix} \hat{R} \\ \hat{G} \\ \hat{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,2410 & -1,5374 & -0,4986 \\ -0,9692 & 1,8760 & 0,0416 \\ 0,0556 & -0,2040 & 1,0570 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} R &= \begin{cases} 12,92 \hat{R}, & \text{kun } \hat{R} \leq 0,00304 \\ 1,055 \hat{R}^{\frac{1}{2,4}}, & \text{kun } \hat{R} > 0,00304 \end{cases} \\ G &= \begin{cases} 12,92 \hat{G}, & \text{kun } \hat{G} \leq 0,00304 \\ 1,055 \hat{G}^{\frac{1}{2,4}}, & \text{kun } \hat{G} > 0,00304 \end{cases} \\ B &= \begin{cases} 12,92 \hat{B}, & \text{kun } \hat{B} \leq 0,00304 \\ 1,055 \hat{B}^{\frac{1}{2,4}}, & \text{kun } \hat{B} > 0,00304 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.16)$$

### 2.5 Värispektri ja valonlähde

Valonlähteen vaikutus värispektriin voidaan teoriassa esittää värispektrin ja valon spektrin kanava-arvojen keskinäisellä kertolaskulla. Tämä on esitetty kaavassa (2.17), missä  $s_i(\lambda)$  on valonlähteen spektri,  $s(\lambda)$  on valonlähteen kanssa yhdistettävä värispektri ja  $n$  on kanava-arvojen lukumäärä. Tässä laskutoimituksessa saattaa kuitenkin värispektrin kanava-arvojen skaala muuttua riippuen valonlähteen skaalasta. Tarvittava normalisointi saadaan laskettua muuttamalla alkuperäinen ja tuloksena saatu värispektri  $Y C_b C_r$ -koordinaatistoon (kaava 2.14), jonka avulla valonlähteen kanssa yhdistetty värispektri voidaan skaalata s.e. molempien värispektrien harmaasävyn taso  $Y$  on yhtä suuri.

$$s_r(\lambda_i) = s_l(\lambda_i) s(\lambda_i), \text{ missä } i = 1, 2, \dots, n \quad (2.17)$$

### 2.6 Virhekaavat

Väriesityksen virheen mittauksessa voidaan käyttää useita kaavoja [15, 18], joita esitellään seuraavassa (kaavat 2.18-2.25). Olkoon  $s_1(\lambda)$  ja  $s_2(\lambda)$  keskenään verrattavia värispektrejä, missä spektriä  $s_2(\lambda)$  verrataan spektriin  $s_1(\lambda)$ . Jos näiden spektrien keskinäinen näytteenottoväli on eri, tulee harvempi spektri interpoloida Fairmanin interpoloinnilla (ks. luku 2.2). Tämä myös edellyttää, että harvemman spektrin kanavien sijaintien joukko on tiheämmän spektrin kanavien sijaintien osajoukko. Nyt  $s_1(\lambda_i)$  ja  $s_2(\lambda_i)$  ovat vastaavien spektrien kanava-arvoja aallonpituudella  $\lambda_i$ , missä  $i = 1, 2, \dots, n$  ja  $n$  on spektrien kanava-arvojen lukumäärä. Merkitään myös



$\Delta s(\lambda)$ :lla kanava-arvojen erotusta.

*Virheen huippuarvo (MAX – Maximum error)*. Virheen huippuarvo on suurin kanava-arvossa aiheutuva virhe.

$$\epsilon_{MAX} = \max |\Delta s(\lambda)| \quad (2.18)$$

*Absoluuttinen keskivirhe (MAE – Mean Absolute Error)*. Lasketaan kahden keskenään vertailtavan värispektrin kanava-arvojen absoluuttisten erotusten keskiarvo.

$$\epsilon_{MAE} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\Delta s(\lambda_i)| \quad (2.19)$$

*Keskimääräinen neliövirhe (MSE – Mean Square Error)*. Lasketaan kahden keskenään vertailtavan värispektrin kanava-arvojen erotusten neliön keskiarvo. Tätä virhemittaa tarvitaan signaalikohinasuhteiden laskennassa (kaavat 2.22 ja 2.23).

$$\epsilon_{MSE} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta s(\lambda_i)^2 \quad (2.20)$$

*Spektrietäisyys (SD – Spectral Distance)*. Lasketaan kahden keskenään vertailtavan värispektrin matemaattinen etäisyys toisistaan. Värispektrisarjoille käytetään kaikkien spektrien etäisyyksien keskiarvoa *MSD – Mean Spectral Distance*.

$$\epsilon_{SD} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta s(\lambda_i)^2} \quad (2.21)$$

*Signaalikohinasuhde (SNR – Signal-to-Noise Ratio)*, joka mittaa värispektrien välistä kohinaa, yksikkönä desibeli  $[\epsilon_{snr}] = dB$ .  $\epsilon_{MSE}$  on keskimääräinen neliövirhe (kaava 2.20).

$$\epsilon_{SNR} = 10 \log_{10} \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n s_1(\lambda_i)^2}{\epsilon_{MSE}} \quad (2.22)$$

*Signaalikohinasuhteen huippuarvo (PSNR – Peak Signal-to-Noise Ratio)*. Kuten signaalikohinasuhde, mutta värispektrin kanava-arvojen keskiarvon sijasta käytetään kanava-arvon teoreettista maksimia  $\hat{s}$ , lisäksi myös  $[\epsilon_{psnr}] = dB$ .

$$\epsilon_{PSNR} = 10 \log_{10} \frac{\hat{S}^2}{\epsilon_{MSE}} \quad (2.23)$$

$\Delta E$ -virhe. Keskenään vertailtavat värispektrit muutetaan ensin  $L^*a^*b^*$ -värikoordinaatistoon (kaavat 2.11 ja 2.12), minkä jälkeen lasketaan näiden kolmen komponentin avulla värien etäisyys. Yleisesti ihminen ei voi erottaa virhettä, missä  $\Delta E < 0,5$ . Koordinaatistomuunnoksen vuoksi virhe on juuri ihmissilmän näköön perustuva virhe. Kaavassa 2.24 termit  $\Delta L^*$ ,  $\Delta a^*$  ja  $\Delta b^*$  ovat vertailtavien värispektrien  $L^*a^*b^*$ -esitysten komponenttien erotukset.

$$\Delta E = \sqrt{\Delta L^{*2} + \Delta a^{*2} + \Delta b^{*2}} \quad (2.24)$$

*Spektrisarjan säilyvyys (Fidelity)*, mikä on pääkomponenttianalyysin yhteydessä käytettävä virhemitta. Lasketaan pääkomponenttianalyysin (ks. luku 3.3)  $k$  suurimman kompressioon mukaan otettavien ominaisarvojen summa ja jaetaan se kaikkien ominaisarvojen summalla. Tämä mittaa kantavektoreissa säilyvän tiedon määrää. Kaavassa (2.25)  $\sigma_i$  on  $i$ . kanava-arvo ja  $n$  on kaikkien kanava-arvojen lukumäärä.

$$\epsilon_{Fid} = \frac{\sum_{i=1}^k \sigma_i}{\sum_{j=1}^n \sigma_j} \cdot 100\% \quad (2.25)$$

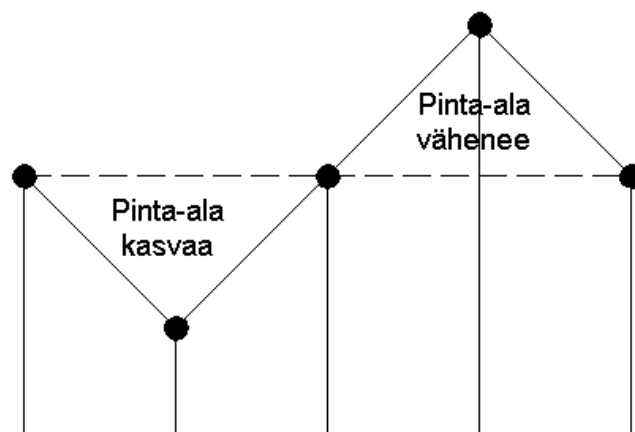
### 3. OPTIMAALISEN NÄYTTEENOTON MITTAUS

Tässä luvussa esitetään menetelmiä optimaalisen tasavälisen näytteenoton selvittämiseksi. Tällaisia ovat diskreettiin integraalilaskentaan, Fourier-muunnokseen ja korrelaatiomatriisiin perustuvat menetelmät. Lisäksi tutkitaan värispektrisarjan esitykseen tarvittavien ominaisvektorien määrää pääkomponenttianalyysillä, ja käydään läpi *Li et al.* [20] kehittämä uusi menetelmä värisovitusfunktioiden laskemiseksi. Viimeiseksi esitetään menetelmä epätasaväliselle näytteenotolle eri painofunktiolla.

#### 3.1 Integraalimenetelmä

Integraalimenetelmässä verrataan eri integrointimenetelmien tarkkuutta värispektrin näytteenottovälin funktiona. Värispektriä *harvennetaan* kasvattamalla näytteenottoväliä sen joksikin monikerraksi. Esimerkiksi 1 nm välein mitattu värispektri harvennetaan 2 nm välein mitatuksi spektriä ottamalla talteen joka toinen kanava-arvo ensimmäisestä kanava-arvosta lukien. Näiden värispektrien diskreettien integraalien erotus voidaan ajatella suoraan virhemittana alkuperäiseen värispektriin nähden.

Integraalien virhefunktioita (kaavat 2.5-2.6) ei voida käyttää suoraan värispektrien virhemittana, sillä derivaatan syötettä  $\xi$  ei voida yksiselitteisesti määrittää. Värispektreistä ei myöskään voida laskea suoraan kokonaispinta-aloja ja ottaa sen jälkeen niiden erotusta. Värispektrin harventamisen johdosta pinta-ala kasvaa toisilla ja laskee toisilla aallonpituusväleillä kuvan 3.1 mukaisesti. Mikäli pinta-alan kasvu ja lasku on kokonaisuudessaan yhtä suurta, ei kokonaispinta-ala muutu lainkaan.



Kuva 3.1: Integrointi puolisuunnikassäännöllä.

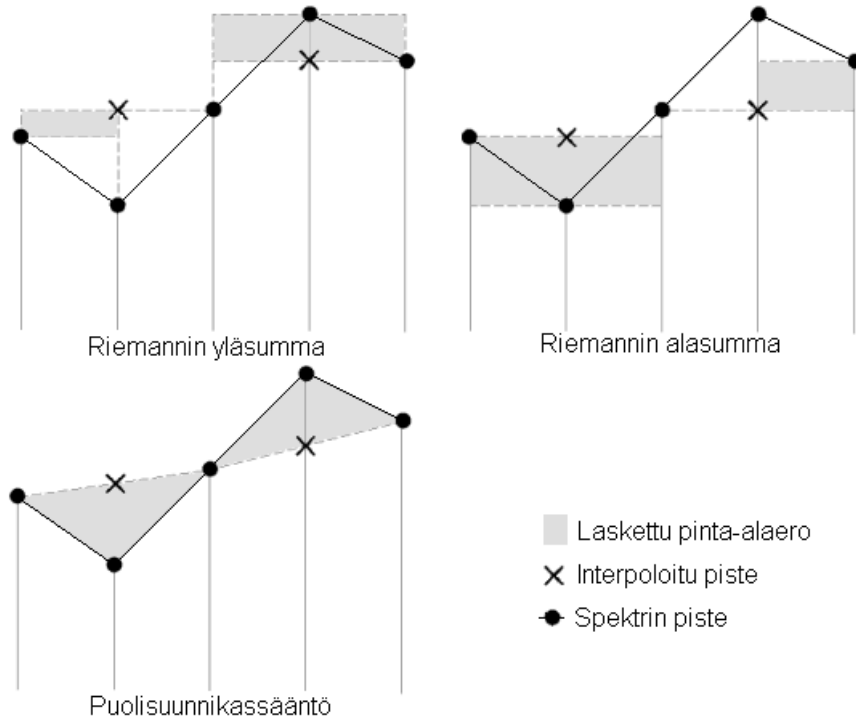
*Värispektrin harventaminen ei välttämättä muuta kokonaispinta-ala.*

Tässä kappaleessa kutsutaan sekaannuksen välttämiseksi alkuperäisen värispektrin näytteenottoväliä *osaväliksi* ja harvennetun värispektrin näytteenottoväliä *aallonpituusväliksi*. Pinta-alojen erotus voidaan laskea osaväli kerrallaan. Tämän jälkeen saatujen osapinta-alojen erotukset lasketaan absoluuttisena yhteen (kaava 3.1). Tässä tutkielmassa tämän laskemiseen on käytetty Riemannin ylä- ja alasummaa, puolisuunnikassääntöä sekä Simpsonin sääntöä (kaavat 2.1-2.4). Kaavassa (3.1)  $s_1(\lambda)$  on alkuperäinen ja  $s_2(\lambda)$  harvennettu värispektri sekä  $m_s$  on laskennassa käytettävien osavälien lukumäärä. Simpsonin säännössä kaava muuttuu hieman, sillä menetelmässä lasketaan kaksi osaväliä kerrallaan (kaava 3.2).

$$\int \Delta s(\lambda) d\lambda = \sum_{i=1}^{m_s} \left| \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} s_1(\lambda) d\lambda - \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} s_2(\lambda) d\lambda \right| \quad (3.1)$$

$$\int \Delta s(\lambda) d\lambda = \sum_{i=1}^{\frac{m_s}{2}} \left| \int_{\lambda_{2i-1}}^{\lambda_{2i+1}} s_1(\lambda) d\lambda - \int_{\lambda_{2i-1}}^{\lambda_{2i+1}} s_2(\lambda) d\lambda \right| \quad (3.2)$$

Harvennetun värispektrin kaikkia tarvittavia pisteitä ei tunneta. Ne tuleekin interpoloida kuvan 3.2 mukaisesti. Riemannin ylä- ja alasummassa ratkaisu on triviaali. Halutulla aallonpituudella spektrin tuntematon piste on sama kuin maksimi/minimi edellisestä ja seuraavasta kanava-arvosta, mikä vastaa Lagrangen interpolointia asteella  $h = 0$  (kaava 2.7). Puolisuunnikassäännössä taas edellinen ja seuraava kanava-arvo muodostavat keskenään suoran, jolle halutun aallonpituuden tuntematon piste sijoittuu. Tämä vastaa Lagrangen interpolointia asteella  $h = 1$ . Simpsonin säännössä interpolointiin on käytetty Lagrangen interpolointikaavaa asteella  $h = 2$ . Interpoloinnissa tulee huomata, että interpoloitua spektriä ei voida käyttää lopullisena värispektrinä, vaan tässä vaiheessa luodaan ainoastaan väliaikainen funktio, jonka avulla integrointi voidaan toteuttaa osaväli kerrallaan.



Kuva 3.2: Interpolointi integraalimenetelmässä.

Integraalimenetelmässä on ongelmana harvennus sellaisella aallonpituusvälillä, jolla värispektrin mittausväli ei jakaudu tasan. Tällöin värispektrin jäännösosa jää laskuista pois. Esimerkiksi, jos harvennetaan 380...780 nm alueelta 1 nm välein mitattu värispektri s.e. käytetty aallonpituusväli on 17 nm, saadaan tuloksena syntyneen värispektrin viimeisen kanava-arvon sijainnille 771 nm (kanava-arvot sijoittuvat aallonpituuksille 380 nm, 397 nm, 414 nm, ..., 771 nm). Loput 9 nm jätetään kokonaan huomiotta, mikä aiheuttaa hieman laskentavirhettä värispektrin päähän. Osavälien määrä putoaa tällöin 400 kappaleesta 391 kappaleeseen. Kun osavälien määrä  $m_s$  siten vaihtelee eri aallonpituusväleillä, tulee saatu pinta-alaerotus jakaa tällä määrällä. Näin saadaan keskimääräinen absoluuttinen pinta-alaerotus osaväliä kohti (kaava 3.3).

$$\Delta A = \frac{\int \Delta s(\lambda) d\lambda}{m_s} \quad (3.3)$$

### 3.2 Taajuustason mittaus

Fourier-muunnoksen määrittely (kaavat 2.8 ja 2.9) edellyttää värispektrin määräämistä ääretömältä väliltä  $]-\infty, \infty[$ . Tämän vuoksi mitattua värispektriä tulee jatkaa molemmista päistään s.e. aallonpituuskäyrä laskee nopeasti nollaan. Jatketun värispektrin ulkopuolella kanava-arvot voidaan olettaa nolaksi, missä Fourier-muunnos integraalilausekkeena on myös nolla. Muunnokseen riittää siten syötteenä jatkettu värispektri. Spektriä jatketaan kaavassa (3.4)

diskreetisti määritellyn *Gaussin käyrän*  $g$  avulla, missä  $\sigma$  on käyrän keskihajonta,  $m_g$  on käyrän osavälien määrä ja  $\Delta\lambda$  on näytteenottoväli. Käyrän alkupuoliskoa käytetään jatkamaan värispektrin alkupäätä ja loppupuoliskoa jatkamaan värispektrin loppupäätä.

$$g(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x - \frac{m_g}{2}\Delta\lambda}{\sigma}\right)^2\right\}, \text{ missä } x=0, \Delta\lambda, 2\Delta\lambda, \dots, m_g\Delta\lambda \quad (3.4)$$

Värispektrin ja Gaussin käyrän liitoskohdasta ehkäistään jatkuvuusongelmaa hakemalla spektrin päiden kulmakertoimet  $s_{kk1}$  ja  $s_{kk2}$  (kaava 3.5). Gaussin käyrän puolikkaista lasketaan numeerinen derivaatta, joka skaalataan värispektrin ensimmäisen/viimeisen kanava-arvon suhteen (kaava 3.6). Käyrästä valitaan ensimmäiseksi jatkopisteeksi huipusta lukien se ensimmäinen piste, jonka suhteutettu derivaatta on alkupään jatkeessa suurempi ja loppupään jatkeessa pienempi kuin värispektrin vastaavan pään kulmakerroin (kaava 3.7). Lisäksi Gaussin käyrä skaalataan s.e. jatkeen ensimmäinen piste on sama kuin värispektrin päätepisteen kanava-arvo, ja se samalla korvaa tämän päätepisteen. Jos käyrän derivaatan ehdot täyttävää pistettä ei löydy, jatketaan värispektriä suoraan Gaussin käyrän koko puolikkaalla. Kuva 3.3 havainnollistaa värispektrin jatkamista.

$$\begin{aligned} s_{kk1} &= s(\lambda_2) - s(\lambda_1) \\ s_{kk2} &= s(\lambda_n) - s(\lambda_{n-1}) \end{aligned} \quad (3.5)$$

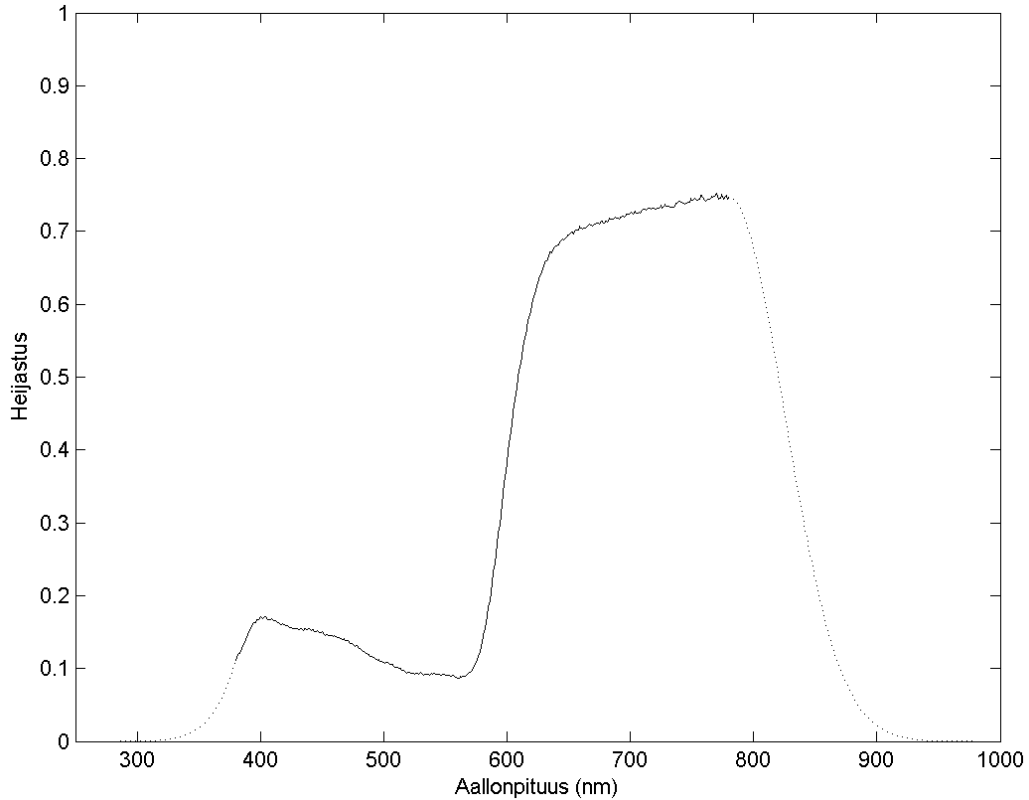
$$\begin{aligned} g_{kk1}(i) &= \frac{s(\lambda_1)}{g(i\Delta\lambda)} [g(i\Delta\lambda) - g((i-1)\Delta\lambda)], \text{ missä } i=1, 2, \dots, \frac{m_g}{2} \\ g_{kk2}(i) &= \frac{s(\lambda_n)}{g((i-1)\Delta\lambda)} [g(i\Delta\lambda) - g((i-1)\Delta\lambda)], \text{ missä } i=\frac{m_g}{2}+1, \frac{m_g}{2}+2, \dots, m_g \end{aligned} \quad (3.6)$$

**Alkupäätä jatkettaessa:**

$$\begin{aligned} s(\lambda_{i-x_1+1}) &= \frac{s(\lambda_1)}{g(x_1\Delta\lambda)} g(i\Delta\lambda), \text{ missä } i=0, 1, \dots, x_1 \\ x_1 &= \begin{cases} \max\{1, 2, \dots, \frac{m_g}{2}\}, \text{ missä } g_{kk1}(x_1) > s_{kk1} \\ \frac{m_g}{2}, \text{ muulloin} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.7)$$

**Loppupäätä jatkettaessa:**

$$\begin{aligned} s(\lambda_{n+i-x_2}) &= \frac{s(\lambda_n)}{g(x_2\Delta\lambda)} g(i\Delta\lambda), \text{ missä } i=x_2, x_2+1, \dots, m_g \\ x_2 &= \begin{cases} \min\{\frac{m_g}{2}, \frac{m_g}{2}+1, \dots, m_g-1\}, \text{ missä } g_{kk2}(x_2+1) < s_{kk2} \\ \frac{m_g}{2}, \text{ muulloin} \end{cases} \end{aligned}$$



Kuva 3.3: Esimerkki värispektrin jatkamisesta.

Jatketulle värispektrille suoritetaan Fourier-muunnos  $F(\omega)$  (ks. luku 2.3), jonka jälkeen lasketaan värispektrin *suhteellinen energia*  $E(\omega)$  kaavalla (3.8), missä  $F^*(\omega)$  on Fourier-muunnoksen liittoluku. Energiakäyrä on symmetrinen, jolloin riittää huomioida vain alkupuolisko. Energiasta nähdään, kuinka paljon värispektrin energiaa sisältyy millekin taajuudelle. Taajuuden  $f$  yksikkönä on  $[f] = \text{sykliä}/\text{nm}$ . Käytännön laskuissa käytetään ns. nopeaa Fourier-muunnosta (*FFT, Fast Fourier Transform*), joka vaatii pisteiden määräksi kakkosen potenssin [13]. Ennen Fourier-muunnosta on värispektriä jatkettu lisää nolilla molemmista päistään s.e. värispektrin  $i$ . kanava-arvo on kanava-arvo aallonpituudella  $i\Delta\lambda$  ja s.e. pisteiden määräksi saadaan  $2^{10} / \Delta\lambda = 1024 / \Delta\lambda$ . Tämä paitsi tekee kaikista jatketuista värispektreistä yhtä pitkiä, myös asettaa värispektrien kanava-arvot yhtenäiselle indeksille sekä toteuttaa FFT:n vaatimuksen kakkosen potenssista.

$$E(\omega) = |F(\omega)|^2 = |F(\omega)| |F^*(\omega)| \quad (3.8)$$

Energiakäyrästä valitaan jokin sopiva *rajataajuus*  $f_i$ . Värispektrin pisteiden määrällä ja taajuudella on suora yhteys [5]. Koska pisteiden määrä on myös kääntäen verrannollinen näytteenottoväliin nähden, on siten rajataajuudella ja näytteenottovälillä yhteys. Näin ollen sopivasti valittu rajataajuus esittää värispektrille sopivan näytteenottovälin, joka on johdettu kaavassa

(3.9). Tiettyyn rajataajuuteen katkaistu värispektri  $s_f(\lambda)$  voidaan myös estimoida kaavan (3.10) avulla [25].

$$n = \lfloor 2(\lambda_n - \lambda_1) f_l \rfloor + 1 = \frac{\lambda_n - \lambda_1}{\Delta \lambda} + 1 \Leftrightarrow \Delta \lambda = \left\lfloor \frac{1}{2 f_l} \right\rfloor \quad (3.9)$$

$$s_f(\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s\left(\frac{n}{2 f_l}\right) \text{sinc}\left[2 f_l\left(\lambda - \frac{n}{2 f_l}\right)\right] \quad (3.10)$$

### 3.3 Korrelaatiomatriisimenetelmä ja pääkomponenttianalyysi

Olkoon värispektrisarjan spektrit  $s_1(\lambda)$ ,  $s_2(\lambda)$ , ...,  $s_N(\lambda)$ . Tällöin sarjan *korrelaatiomatriisi*  $R$  määritellään kaavan (3.11) mukaisesti, missä  $N$  on värispektrien lukumäärä. Matriisi  $R$  on symmetrinen neliömatriisi ja sen dimensio on  $n \times n$ . Matriisi esittää värispektrisarjan eri kanava-arvojen keskinäisen vaikutuksen eli korreloinnin.

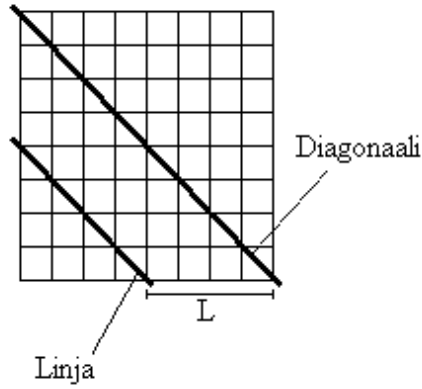
$$R = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N s_i(\lambda) s_i(\lambda)^T \quad (3.11)$$

Yleisin korrelaatiota kuvaava tunnusluku on Pearsonin tulomomenttikorrelaatiokerroin. Näistä kertoimista voidaan koostaa korrelaatiomatriisi  $R_p$ , mikä esittää värispektrin eri aallonpituuksien välisen riippuvuuden. Matriisin alkio  $k$ . rivillä ja  $l$ . sarakkeella  $r_p(k, l)$  esittää aallonpituuksien  $\lambda_k$  ja  $\lambda_l$  keskinäisen riippuvuuden. Tämä on esitetty kaavassa (3.12), missä  $\overline{s_i(\lambda)}$  on värispektrin kanava-arvojen keskiarvo [6]. Mikäli kaava antaa tulokseksi 1 tai -1, on aallonpituuksilla täydellinen korrelaatio. Jos tulos on 0, ei korrelaatiota ole lainkaan.

$$r_p(k, l) = \frac{\sum_{i=1}^N [s_i(\lambda_k) - \overline{s_i(\lambda)}][s_i(\lambda_l) - \overline{s_i(\lambda)}]}{\sqrt{\sum_{i=1}^N [s_i(\lambda_k) - \overline{s_i(\lambda)}]^2 \sum_{i=1}^N [s_i(\lambda_l) - \overline{s_i(\lambda)}]^2}} \quad (3.12)$$

Siirryttäessä korrelaatiomatriisiin  $R_p$  diagonaalilta vaakasuoraan ulospäin, voidaan tälle ulkopuoliselle alueelle muodostaa diagonaalin suuntainen *linja* kuvan 3.4 mukaisesti. Olkoon tämän linjan vaakasuora (tai pystysuora) etäisyys diagonaalilta  $L \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ . Tällöin linja sisältää vain  $i$ . ja  $i \pm L$ . kanava-arvojen välisen korrelaation (missä  $i = L+1, L+2, \dots, n-L$ ). Kun linjan sisältämistä arvoista lasketaan keskiarvo  $r_L$ , saadaan määriteltyä, kuinka paljon näytteenottoväli  $L\Delta\lambda$  (missä  $\Delta\lambda$  on alkuperäisen värispektrin näytteenottoväli) keskimäärin korreloi värispektrisarjassa. Tämä keskiarvo voidaan esittää kaavan (3.13) avulla.





Kuva 3.4: Linja korrelaatiomatriisissa.

$$r_L = \frac{\sum_{i=L+1}^n r_p(i, i-L)}{n-L} \quad (3.13)$$

Vastaavasti värispektrisarjan  $c$ . kanava-arvon keskimääräinen korrelaatio eri kanava-arvojen kanssa saadaan vektorina korrelaatiomatriisin  $c$ . rivin (tai symmetrisyyden nojalla  $c$ . sarakkeen) arvoista kaavan (3.14) mukaisesti, missä  $i$  on  $i$ . kanava-arvo. Tällöin  $c \in \{1, 2, \dots, n\}$  ja  $i = 1, 2, \dots, n$ .

$$r_c(i) = r_p(c, i) = r_p(i, c) \quad (3.14)$$

Värispektrisarjan spektrit voidaan esittää pienemmällä määrällä parametreja pääkomponenttianalyysin (PCA = Principal Component Analysis) avulla [24]. Korrelaatiomatriisin  $R$  (kaava 3.11) karakteristinen polynomi on muuttujan  $\sigma$  polynomi

$$\det(R - \sigma I) = \begin{vmatrix} r(1,1) - \sigma & r(1,2) & \cdots & r(1,n) \\ r(2,1) & r(2,2) - \sigma & \cdots & r(2,n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r(n,1) & r(n,2) & \cdots & r(n,n) - \sigma \end{vmatrix}, \quad (3.15)$$

missä  $I$  on yksikkömatriisi. Yhtälö

$$\det(R - \sigma I) = 0 \quad (3.16)$$

on  $n$ . asteen polynomiyhtälö, minkä ominaisarvot  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$  ovat sen nollakohdat. Vastaavasti voidaan määritellä  $n$  kpl ominaisvektoreita  $\Phi_1(\lambda), \Phi_2(\lambda), \dots, \Phi_n(\lambda)$  yhtälöryhmästä

$$R\Phi = \sigma\Phi \Leftrightarrow (R - \sigma I)\Phi = 0. \quad (3.17)$$

Suurimpia ominaisarvoja  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$  (missä  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$  ja  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_k$ ) vastaavat ominaisvektorit ovat värispektrisarjan  $s_1(\lambda), s_2(\lambda), \dots, s_M(\lambda)$  kantavektoreita, joiden lineaarisella

kombinaatiolla värispektrit voidaan kelvollisesti rekonstruoida. Tämä on esitetty kaavassa (3.18), missä  $s'_i(\lambda)$  on rekonstruoitu värispektri. Termi  $P$  edustaa *sisätuloa*, joka kantavektorien kanssa esittää värispektrin.

$$s'_i(\lambda) = P \begin{bmatrix} \Phi_1(\lambda) \\ \Phi_2(\lambda) \\ \vdots \\ \Phi_k(\lambda) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \Phi_1(\lambda) \\ \Phi_2(\lambda) \\ \vdots \\ \Phi_k(\lambda) \end{bmatrix} s_i(\lambda) \begin{bmatrix} \Phi_1(\lambda) \\ \Phi_2(\lambda) \\ \vdots \\ \Phi_k(\lambda) \end{bmatrix}^T \quad (3.18)$$

### 3.4 Uusi menetelmä CIE-värisovitusfunktioiden laskemiseksi

*Li et al.* [20] esittävät mielestään optimaalisen menetelmän CIE-värisovitusfunktioiden laskemiseksi. Testiaineistona he ovat käyttäneet 400...700 nm alueelta 10 nm välein mitattua aineistoa, joka on interpoloitu Fairmanin interpoloinnilla. Heidän testiaineistonsa pohjalta uusi menetelmä tuottaa lähes aina paremman tuloksen verrattuna standardimenetelmiin.

Olkoon valonlähde  $s_i(\lambda)$  mitattu  $\lambda_1 \dots \lambda_n$  alueelta ja olkoon sen näytteenottoväli 1 nm. Olkoon niin ikään  $\Delta\lambda$  haluttujen painokertoimien näytteenottoväli, joka on jaollinen välillä  $\lambda_n - \lambda_1$ . Edelleen määrätään

$$\begin{aligned} W_X(\lambda) &= \frac{s_i(\lambda) \bar{x}(\lambda)}{\sum_{\lambda=\lambda_1}^{\lambda_n} s_i(\lambda) \bar{y}(\lambda)} \\ W_Y(\lambda) &= \frac{s_i(\lambda) \bar{y}(\lambda)}{\sum_{\lambda=\lambda_1}^{\lambda_n} s_i(\lambda) \bar{y}(\lambda)} , \\ W_Z(\lambda) &= \frac{s_i(\lambda) \bar{z}(\lambda)}{\sum_{\lambda=\lambda_1}^{\lambda_n} s_i(\lambda) \bar{y}(\lambda)} \end{aligned} \quad (3.19)$$

missä  $\bar{x}(\lambda)$ ,  $\bar{y}(\lambda)$  ja  $\bar{z}(\lambda)$  ovat CIE 1931 (tai 1964) standardin mukaiset värisovitusfunktiot. Tällöin tristimulusarvot määräytyvät kaavan (2.9) mukaisesti, eli

$$\begin{aligned} X &= \int_{\lambda_1}^{\lambda_n} W_X(\lambda) R(\lambda) d\lambda \\ Y &= \int_{\lambda_1}^{\lambda_n} W_Y(\lambda) R(\lambda) d\lambda , \\ Z &= \int_{\lambda_1}^{\lambda_n} W_Z(\lambda) R(\lambda) d\lambda \end{aligned} \quad (3.20)$$

missä  $R(\lambda)$  on heijastusspektri (kanava-arvot välillä  $[0, 1]$ ). Vastaavasti uuden menetelmän

tristimulusarvot määritellään seuraavasti

$$\begin{aligned} X' &= \int_{\lambda_1}^{\lambda_n} W_X^{(\Delta\lambda)} R'_i \\ Y' &= \int_{\lambda_1}^{\lambda_n} W_Y^{(\Delta\lambda)} R'_i, \\ Z' &= \int_{\lambda_1}^{\lambda_n} W_Z^{(\Delta\lambda)} R'_i \end{aligned} \quad (3.21)$$

missä  $R'_i$  on jollakin näytteenottovälillä mitattu heijastusspektri. *Li et al.* interpoloivat käyttämänsä testiaineiston 1 nm tarkkuuteen, minkä jälkeen aineisto harvennetaan halutulle näytteenottovälille  $\Delta\lambda$  kaavan (3.22) mukaisesti. Tässä  $P_i(\lambda)$  on menetelmäfunktio, joka määritellään kaavassa (3.23). Värispektrin oletetaan siten noudattavan kaavaa (3.22).

$$R'_i = \int_{\lambda_1}^{\lambda_n} P_i(\lambda) R(\lambda) d\lambda \quad (3.22)$$

$$P_i(\lambda) = \begin{cases} \frac{\lambda - \lambda_{i-1}}{\Delta\lambda^2}, & \text{kun } \lambda_{i-1} \leq \lambda \leq \lambda_i \\ \frac{\lambda_{i+1} - \lambda}{\Delta\lambda^2}, & \text{kun } \lambda_i \leq \lambda \leq \lambda_{i+1} \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases} \quad (3.23)$$

Menetelmä toimii samalla tavalla kaikille tristimulusarvoille, joten seuraavassa merkintä  $V$  tarkoittaa tristimulusarvoa  $X$ ,  $Y$  tai  $Z$ . Nyt uuden menetelmän ja standardimenetelmän tristimulusarvojen erotusfunktio on

$$\begin{aligned} V' - V &= \sum_{i=1}^n W_{V,i}^{(\Delta\lambda)} R'_i - \int_{\lambda_1}^{\lambda_n} W_V(\lambda) R(\lambda) d\lambda \\ &= \int_{\lambda_1}^{\lambda_n} D_V(\lambda) R(\lambda) d\lambda, \end{aligned} \quad (3.24)$$

josta määritellään

$$D_V(\lambda) = \left[ \sum_{i=1}^n W_{V,i}^{(\Delta\lambda)} P_i(\lambda) \right] - W_V(\lambda). \quad (3.25)$$

Koska  $R(\lambda) \in [0, 1]$ , saadaan

$$|V' - V| \leq \left| \int_{\lambda_1}^{\lambda_n} D_V(\lambda) R(\lambda) d\lambda \right| \leq \int_{\lambda_1}^{\lambda_n} |D_V(\lambda)| d\lambda \quad (3.26)$$

ja edelleen

$$\begin{aligned}
|V' - V| &\leq \left| \int_{\lambda_1}^{\lambda_n} D_V(\lambda) R(\lambda) d\lambda \right| \\
&\leq \sqrt{\int_{\lambda_1}^{\lambda_n} R(\lambda)^2 d\lambda} \sqrt{\int_{\lambda_1}^{\lambda_n} D_V(\lambda)^2 d\lambda} \\
&\leq \sqrt{\lambda_n - \lambda_1} \sqrt{\int_{\lambda_1}^{\lambda_n} D_V(\lambda)^2 d\lambda}.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Erotusfunktio rajautuu kaavan (3.27) mukaisesti, jolloin riittää määrätä ylhäältä rajoittava lauseke mahdollisimman pieneksi. Määritellään tästä

$$F = F(W_{V,1}^{(\Delta\lambda)}, W_{V,2}^{(\Delta\lambda)}, \dots, W_{V,n}^{(\Delta\lambda)}) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_n} D_V(\lambda)^2 d\lambda, \tag{3.28}$$

missä  $W_{V,1}^{(\Delta\lambda)}, W_{V,2}^{(\Delta\lambda)}, \dots, W_{V,n}^{(\Delta\lambda)}$  ovat painokertoimet tristimulusarvolle  $V$  funktion  $F$  ollessa minimissään. Tämä ääriarvo haetaan funktion  $F$  derivaatan nollakohdasta (vrt. kaavoja 3.25 ja 3.28)

$$\frac{dF}{dW_{V,j}^{(\Delta\lambda)}} = 2 \int_{\lambda_1}^{\lambda_n} D_V(\lambda) P_j(\lambda) d\lambda. \tag{3.29}$$

Niin ikään kaavojen (3.23), (3.25) ja (3.29) avulla saadaan

$$\sum_{i=1}^n W_{V,j}^{(\Delta\lambda)} \int_{\lambda_{j-1}}^{\lambda_{j+1}} P_i(\lambda) P_j(\lambda) d\lambda = \int_{\lambda_{j-1}}^{\lambda_{j+1}} W_V(\lambda) P_j(\lambda) d\lambda, \text{ missä } j=1, 2, \dots, n, \tag{3.30}$$

missä vektoreiden ulkopuoliset arvot  $W_V(\lambda_0) = 0$ ,  $W_V(\lambda_{n+1}) = 0$ ,  $P_i(\lambda_0) = 0$  ja  $P_i(\lambda_{n+1}) = 0$ . Merkitään kaavan (3.30) integraaleja

$$\begin{aligned}
g_{ji} &= 6 \Delta\lambda \int_{\lambda_{j-1}}^{\lambda_{j+1}} P_i(\lambda) P_j(\lambda) d\lambda \\
h_j &= 6 \Delta\lambda \int_{\lambda_{j-1}}^{\lambda_{j+1}} W_V(\lambda) P_j(\lambda) d\lambda,
\end{aligned} \tag{3.31}$$

jolloin voidaan kaavan (3.23) avulla todeta

$$\begin{aligned}
g_{ji} &= 0, \text{ kun } |i-j| \geq 2 \\
g_{jj-1} &= g_{jj+1} = 1 \\
g_{jj} &= 4.
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Kaava (3.30) määräytyy siten seuraavasti

$$\bar{G}w=h, \text{ missä } \bar{G}=\begin{bmatrix} 4 & 1 & & & \\ 1 & 4 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 4 & 1 \\ & & & 1 & 4 \end{bmatrix}, h=\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} \text{ ja } w=\begin{bmatrix} W_{V,1}^{(\Delta\lambda)} \\ W_{V,2}^{(\Delta\lambda)} \\ \vdots \\ W_{V,n}^{(\Delta\lambda)} \end{bmatrix}. \quad (3.33)$$

Koska nyt

$$\sum_{j=1}^n h_j = 6 \int_{\lambda_1}^{\lambda_n} W_V(\lambda) d\lambda = 6 \sum_{i=1}^n W_{V,i}^{(1)}, \quad (3.34)$$

tulee  $\bar{G}$  korjata matriisiksi  $G$ , missä jokainen matriisin sarakkeen summa on kuusi, eli

$$Gw=h, \text{ missä } G=\begin{bmatrix} 5 & 1 & & & \\ 1 & 4 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 4 & 1 \\ & & & 1 & 5 \end{bmatrix}. \quad (3.35)$$

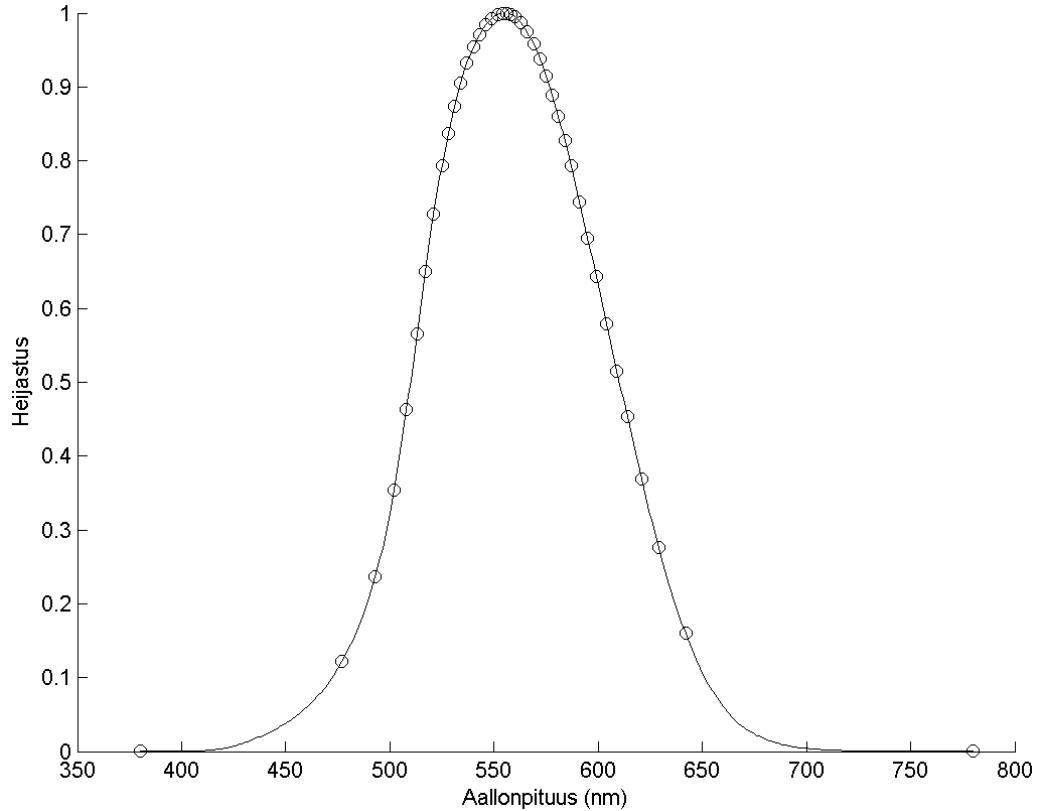
Tällöin painokertoimet tristimulusarvolle  $V$  ovat kaavasta (3.35) matriisin  $w$  alkiot

$$w=\begin{bmatrix} W_{V,1}^{(\Delta\lambda)} \\ W_{V,2}^{(\Delta\lambda)} \\ \vdots \\ W_{V,n}^{(\Delta\lambda)} \end{bmatrix}. \quad (3.36)$$

### 3.5 Epätasavälinen näytteenotto

Olkoon painofunktio  $p(\lambda)$  tunnettu 1 nm tarkkuudella värispektrin mittausvälillä  $\lambda_1 \dots \lambda_n$ . Skaalataan tämä painofunktio s.e. sen arvot ovat välillä  $]0, 1]$ . Painofunktiota käytetään värispektrin näytteenoton tiheysfunktiona. Näytteenotto määrätään tiheäksi niillä aallonpituuksilla, missä painofunktion arvot ovat suuria sekä vastaavasti harvaksi niillä aallonpituuksilla, missä painofunktion arvot ovat pieniä.

Tasavälisissä näytteenottomenetelmissä käytettiin mittana näytteenottoväliä. Koska nyt näytteenottoväli vaihtelee värispektrin eri aallonpituuksilla, käytetään mittana kanava-arvojen lukumäärää  $z$ . Jaetaan painofunktio  $p(\lambda)$  jakopisteillä ( $z$  kpl) jakoväleihin ( $z-1$  kpl) s.e jokaisen jakovälin integraali on yhtä suuri. Kaksi jakopistettä määräytyvät (jakopisteiden lukumäärästä riippumatta) aina samalla tavalla: ensimmäinen ja viimeinen. Ensimmäinen jakopiste on aina  $\lambda_1$  ja viimeinen  $z$ . jakopiste  $\lambda_n$ . Painofunktioon muodostetut jakopisteet muodostavat nyt värispektrin kanava-arvojen sijainnit kuvan 3.5 mukaisesti. Yhden jakovälin teoreettinen pinta-ala  $A_0$  voidaan laskea kaavalla (3.37).



Kuva 3.5: Jakopisteiden (41 kpl) sijainnit, kun ihmisen silmän herkkyyssä on painofunktiona.

$$A_0 = \frac{\int p(\lambda) d\lambda}{z-1} \quad (3.37)$$

Tarkastellaan esimerkkinä erästä derivaataan perustuvaa painofunktiota matemaattisesti. Oletetaan, että värispektri  $s(\lambda)$  tunnetaan  $\lambda_1 \dots \lambda_n$  alueelta 1 nm tarkkuudella, ja määrätään tämän skaalatun derivaatan itseisarvo painofunktioksi  $p(\lambda)$  kaavan (3.38) mukaisesti. Mahdolliset nollakohdat tulee muuttaa pieneksi positiiviseksi luvuksi, koska painofunktiossa tulee olla vain positiivisia lukuja. Kaavassa (3.38) tämä pieni positiivinen luku on määritelty painofunktion positiivisten arvojen minimin puolikkaaksi. Lisäksi painofunktiota on vielä jatkettu alkupäästään yhdellä arvolla, mikä on funktion ensimmäinen arvo, koska derivaatan laskennassa pisteiden lukumäärä pienenee yhdellä.

$$p(\lambda_{2\dots n}) = \frac{\left| \frac{ds(\lambda)}{d\lambda} \right|}{\max \left| \frac{ds(\lambda)}{d\lambda} \right|}, \quad (3.38)$$

$$\text{lisäksi } p(\lambda)_{=0} = \frac{\min(p(\lambda_{2\dots n}))_{\neq 0}}{2} \text{ ja } p(\lambda_1) = p(\lambda_2)$$

Jaetaan nyt painofunktio  $p(\lambda)$  jakoväleihin s.e. tämän integraali on jokaisessa jakovälissä vakio. Tästä seuraa, että värispektrin kanava-arvojen muutoksien summa on jokaisella näytteenottovälillä vakio. Jakopisteet määräävät värispektrin  $s(\lambda)$  lopullisten kanava-arvojen sijainnit, jolloin muut kanava-arvot 1 nm spektristä poistetaan ja tuloksena on epätasavälisesti harvennettu värispektri. Värispektriin sovelletaan tiheää näytteenottoväliä niillä aallonpituuksilla, missä kanava-arvot muuttuvat nopeasti sekä harvaa näytteenottoväliä niillä aallonpituuksilla, missä kanava-arvojen muutos on vähäistä. Koska mitattavaa värispektriä ei kuitenkaan tunneta etukäteen, on spektrin derivaatan määrittely painofunktioksi mahdotonta. Tämä painofunktio toimii kuitenkin matemaattisena vertailufunktiona käytännön menetelmiin nähden.

Toisena matemaattisena vertailufunktiona on käytetty korrelaatiomatriisiin  $R_p$  perustuvaa menetelmää. Lasketaan tämän korrelaatiomatriisin rivien keskiarvo  $\overline{R_p}$ . Nyt tiedetään, kuinka paljon mikäkin aallonpituus keskimäärin korreloi spektrisarjassa muihin aallonpituuksiin nähden. Toteutetaan tästä painofunktio kaavan (3.39) mukaisesti. Värispektrit tulee jälleen tietää etukäteen, jotta korrelaatiomatriisin voi konstruoida. Toisaalta, jos samassa valaistuksessa mitataan ensin joitakin sopivasti valittuja spektrejä 1 nm tarkkuudella, voidaan korrelaatiomatriisi arvioida näiden avulla.

$$p(\lambda) = \frac{1 - \overline{R_p}}{\max(1 - \overline{R_p})} \quad (3.39)$$

Oikea painofunktio voidaan määrätä eri tavoilla. Käytännössä painofunktioksi voidaan ottaa esimerkiksi *ihmisen silmän herkkyyssäyrä*, joka on y-komponentti CIE 1931 -värisovitusfunktioista [30]. Toisena esimerkkinä sopivaksi painofunktioksi on *opponenttiväriteoriaan* [16] perustuvien herkkyysherkkyysfunktioiden (kaava 3.40, [2]) itseisarvojen maksimi (kaava 3.41). Näissä  $\bar{x}(\lambda)$ ,  $\bar{y}(\lambda)$  ja  $\bar{z}(\lambda)$  ovat CIE 1931 -värisovitusfunktiot sekä  $kw(\lambda)$ ,  $rg(\lambda)$  ja  $yb(\lambda)$  opponenttiväriteoriaan perustuvien herkkyysherkkyysfunktioiden musta-valkoinen, puna-vihreä ja kelta-sininen komponentti.

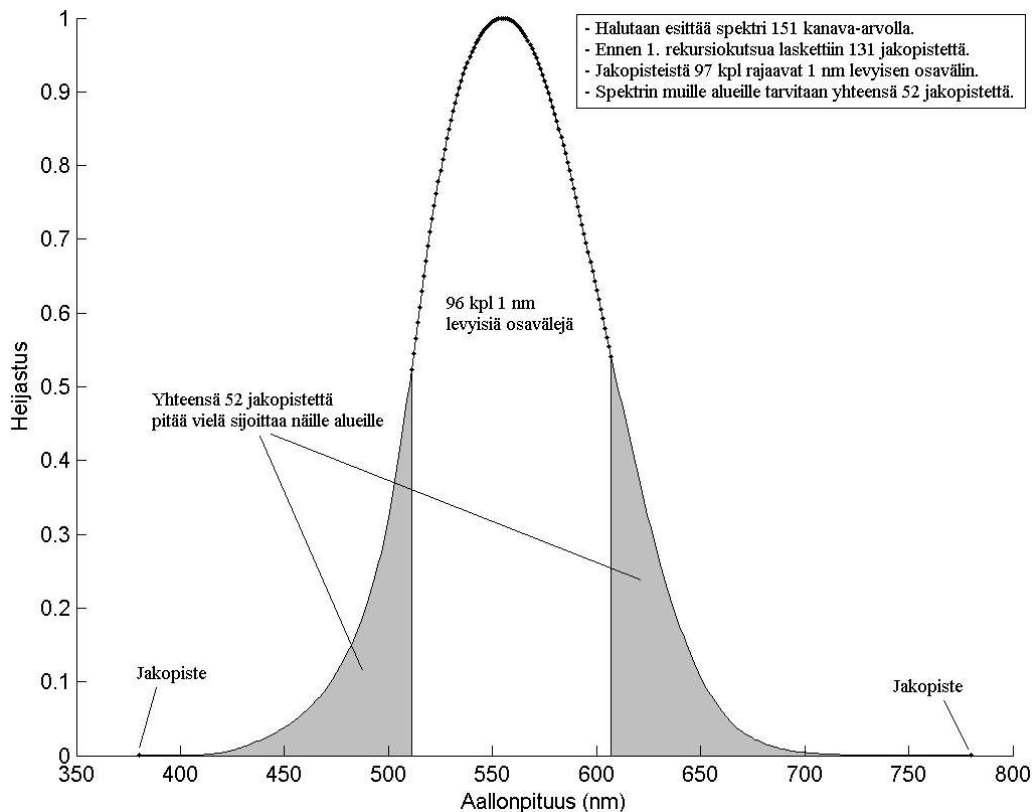
$$\begin{bmatrix} kw(\lambda) \\ rg(\lambda) \\ yb(\lambda) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0,4 & -0,4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}(\lambda) \\ \bar{y}(\lambda) \\ \bar{z}(\lambda) \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

$$p(\lambda_i) = \max\{|kw(\lambda_i)|, |rg(\lambda_i)|, |yb(\lambda_i)|\}, \text{ missä } i=1, 2, \dots, n \quad (3.41)$$

Menetelmässä on kolme käytännön tasolla ilmenevää ongelmaa. Kun tarkkuudeksi määrätään riittävän suuri määrä kanava-arvoja ja tarkimmaksi mahdolliseksi näytteenottoväliksi vaadi-

taan 1 nm, tulee tiheimmillä alueilla painofunktion osavälin pinta-alasta suurempi kuin mitä teoreettisen osavälin integraali (kaava 3.37) on. Oikea näytteenottoväli on näillä alueilla alle 1 nm, mutta koska väli pyöristyy 1 nm tarkkuuteen, kasvaa pinta-ala vastaavasti liikaa. Laskettaessa kanava-arvojen sijaintia näillä ehdoilla, on lopullinen kanava-arvojen määrä aina pienempi tai yhtä suuri kuin haluttu kanava-arvojen määrä.

Kanava-arvojen vajuus voidaan korjata rekursiivisesti. Lasketaan ensin jakopisteet, ja huomataan, että niiden määrä  $m$  on pienempi kuin haluttu kanava-arvojen määrä  $z$  ( $m < z$ ). Tästä seuraa, että on olemassa ainakin yksi jakopisteiden määrää rajoittava osaväli, jonka leveys on 1 nm. Lasketaan näiden 1 nm levyisten osavälien määräämien jakopisteiden kokonaismäärä  $k$ , laitetaan nämä ja spektrin päiden jakopisteet talteen sekä eliminoidaan muut. Poistetaan seuraavaksi 1 nm levyiset osavälit integraalista määräämällä näiden pinta-alat nolllaksi. Nyt tallennettujen jakopisteiden erottamille yli 1 nm levyisille alueille tarvitaan kanava-arvoja  $z-k-2$  kpl, jolloin voidaan toistaa koko menetelmä näille alueille (kuva 3.6). Alueita ei kuitenkaan saa yhdistää. Tarvittavien kanava-arvojen määrä  $z-k-2$  suppenee vähitellen nolllaksi, jolloin kaikki jakopisteet ( $z$  kpl) on määritelty.



Kuva 3.6: Kanava-arvojen sijainnin laskenta ennen 1. rekursiivista kutsua, kun painofunktiona käytetään ihmisen silmän herkkyysskäyrää.



Toinen ongelma on edellä kerrotun ongelman ratkaisun seuraus. Joissakin hyvin harvinaisissa tilanteissa rekursion seurauksena syntyneet yli 1 nm levyisten alueiden pinta-alat ovat pienempiä kuin jakovälin teoreettinen pinta-ala  $A_0$ . Koska alueita ei voi yhdistää, tarvittavien kanava-arvojen lukumäärän suppeneminen pysähtyy. Tällöin haetaan se osaväli  $\lambda_x \dots \lambda_{x+1}$ , jonka integraali on suurin kaikista osaväleistä ja jossa  $x$ . tai  $x+1$ . kanava-arvo on jakopisteenä, mutta eivät molemmat. Tällöin toinenkin kanava-arvo tehdään jakopisteeksi ja syntynyt jakoväli nollataan. Tämä käytännössä tarkoittaa, että yksi uusi 1 nm levyinen jakoväli liitetään johonkin vastaavien jakovälien ryhmään. Nyt edellä olevaa rekursiota voidaan jälleen jatkaa normaalisti. Tämän ongelman synty edellyttää erittäin vaihtelevaa painofunktiota ja riittävän suurta määrää jakopisteitä, jolloin suppeneminen pysähtyy aivan laskennan loppuvaiheessa. Kaikkiaan ongelmaa ei esiinny lainkaan käytettäessä ihmisen silmän herkkyyssäilyä tai opponentimenetelmään perustuvaa käyrää painofunktiona, mutta voi esiintyä joissakin värispektrin derivaattojen perustuvissa painofunktioissa.

Menetelmässä esiintyvä kolmas ongelma johtuu näytteenottovälin pyöristyksestä kokonaisluvuksi. Koska oikea näytteenottoväli on jokin desimaaliluku, voi näytteenottoväli (painofunktion lokaalista monotonisesta kasvusta tai laskusta huolimatta) vuorotella kahden eri arvon välillä. Esimerkiksi, jos laskettu osavälin leveys on tietyllä alueella 2,5 nm usean välin ajan, vuorottelevat leveydet 2 nm ja 3 nm, vaikka painofunktio olisi monotonisesti nouseva tai laskeva. Tässä lokaalissa kohdassa tulee vuorottelevat leveydet järjestää siirtämällä jakopisteitä. Niillä osaväleillä, missä painofunktio saa suurimmat arvonsa, asetetaan tiheämpi väli (esimerkissä 2 nm) ja muille harvempi väli (esimerkissä 3 nm). Tulee huomata, että nyt osavälien leveydet vain järjestetään uudelleen jakopisteitä siirtämällä ja vain tällaisella näytteenottovälejä vuorottelevalla lokaalilla alueella. Edellä mainitussa esimerkissä on järjestämisen jälkeen 2 nm ja 3 nm levyisiä osavälejä täsmälleen samalla alueella täsmälleen yhtä paljon kuin ennen järjestämistä.

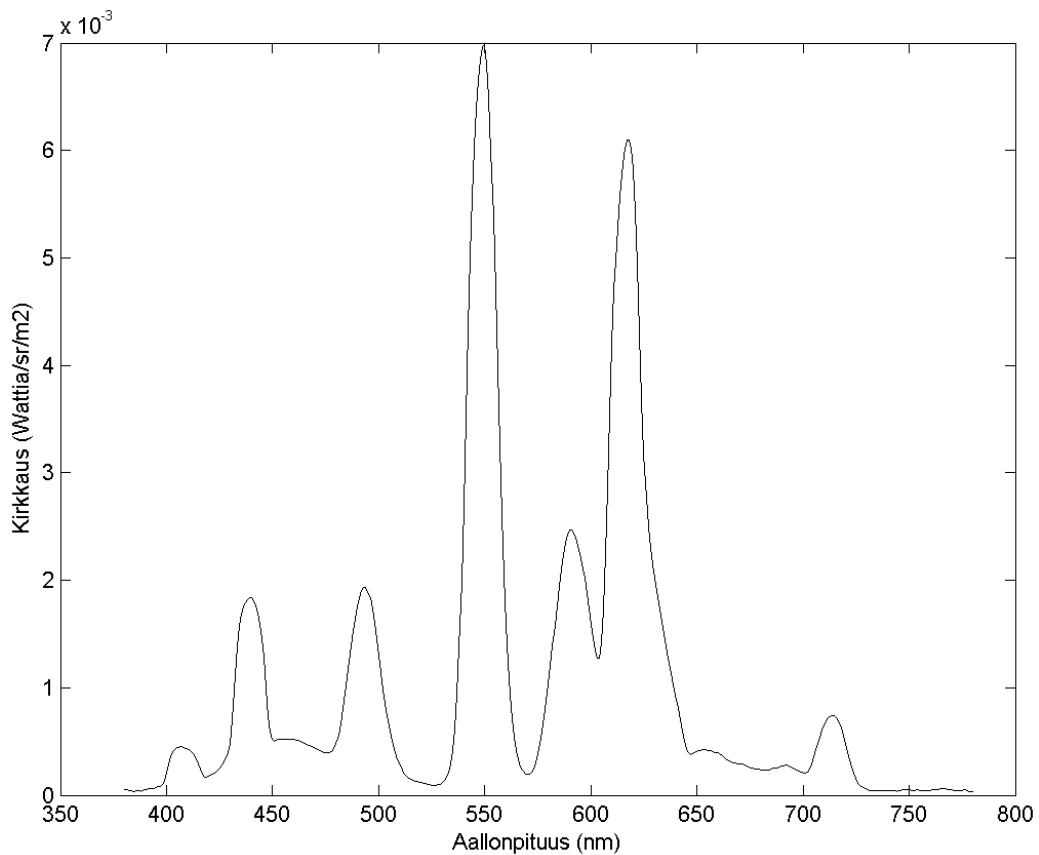
Epätasavälisen näytteenoton menetelmä on esitetty pseudokoodina liitteessä 1. Sen aikavaativuus yhdelle värispektrille on  $O(n)$  ja pahimmassa tapauksessa  $O(n^2)$ , missä  $n$  on painofunktion arvojen lukumäärä. Jakopisteiden laskenta on toteutettu järjestyksessä pienimmästä aallonpituudesta suurimpaan. Viimeisimmän osavälin järjestys edelliseen nähden tarkastetaan ja tarvittaessa vaihdetaan jo jakopisteitä laskettaessa. Jos viimeisin laskettu osaväli on pienempi kuin sitä edellinen, ja painofunktion arvojen lokaali minimi ko. osavälissä on pienempi tai yhtä suuri kuin edellisen osavälin vastaava minimiarvo, tulee osavälien leveydet vaihtaa siirtämällä osavälien välissä olevaa jakopistettä. Näin tulee menetellä myös, jos viimeisin laskettu

osaväli on suurempi kuin sitä edellinen, ja painofunktion arvojen lokaali maksimi ko. osavälissä on suurempi kuin edellisen osavälin vastaava maksimiarvo. Algoritmossa ei kuitenkaan selviä yhdellä vaihdolla. Viimeisin osaväli on vaihdon jälkeen toiseksi viimeisin, mutta se voi edelleen olla väärin sijoittunut sitä edellisen kolmanneksi viimeisimmän osavälin kanssa. Osaväliä tuleekin liu'uttaa kohti alkupäätä niin pitkälle, kunnes tulee ensimmäinen tilanne, jossa edellä mainitut ehdot eivät enää täyty, eikä vaihtoa tapahdu.

#### 4. TESTIAINEISTO

Testiaineistona käytettiin 1269 mattapintaista *Munsell*-heijastusspektriä. Näytteet on mitattu *Perkin-Elmer lambda 9 UV/VIS/NIR* -spektrofotometrillä 380...800 nm aallonpituusalueelta 1 nm näytteenottovälillä [12]. Lisäksi aineistossa käytettiin valonlähdettä *Artificial Daylight (6500K), White1193283 F18W/835*. Tämän valonlähteen spektri on mitattu *SpectraScan PR-705* -radiometrillä 376...776 nm aallonpituusalueelta 2 nm näytteenottovälillä [17].

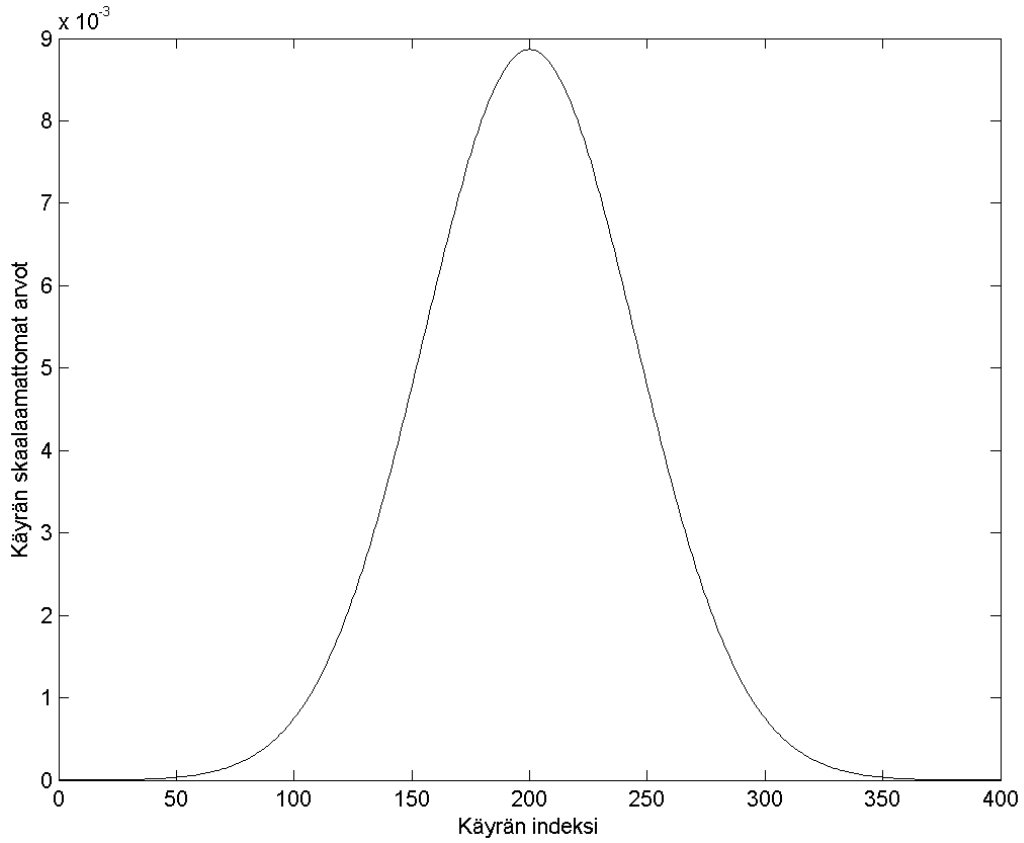
Tässä tutkielmassa koko aineisto muutettiin ensin 380...780 nm alueelle ennen laskentaa. *Munsell*-sarjan heijastusspektreistä on 20 viimeistä kanava-arvoa poistettu. Valonlähteen spektri interpoloitiin Fairmanin interpoloinnilla 1 nm näytteenottoväliin. Tämän jälkeen neljä ensimmäistä kanavaa poistettiin sekä kanava-arvot 775 nm, 774 nm, 775 nm ja 776 nm aallonpituuksilta sijoitettiin tässä järjestyksessä aallonpituuksille 777...780 nm. Näin valonlähteen spektri saatiin 380...780 nm aallonpituusalueelle. Lopullisena testiaineistona käytettiin *Munsell*-sarjan heijastusspektrejä suoraan sekä sovitettuna valonlähteen kanssa. Valonlähteen spektri on esitetty kuvassa 4.1.



*Kuva 4.1: Valonlähteen spektri.*

Taajuustason mittauksissa jatkettu Gaussin käyrä on valittu silmämääräisesti. Keskihajontana on käytetty arvoa 45 ja osavälien määränä arvoa 400, jolloin kaava (3.4) supistuu kaavan (4.1) mukaiseksi. Tämä Gaussin käyrä on esitetty kuvassa 4.2.

$$g(x) = \frac{1}{45 \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-200)^2}{4050}\right\}, \text{ missä } x=0, 1, 2, \dots, 400 \quad (4.1)$$



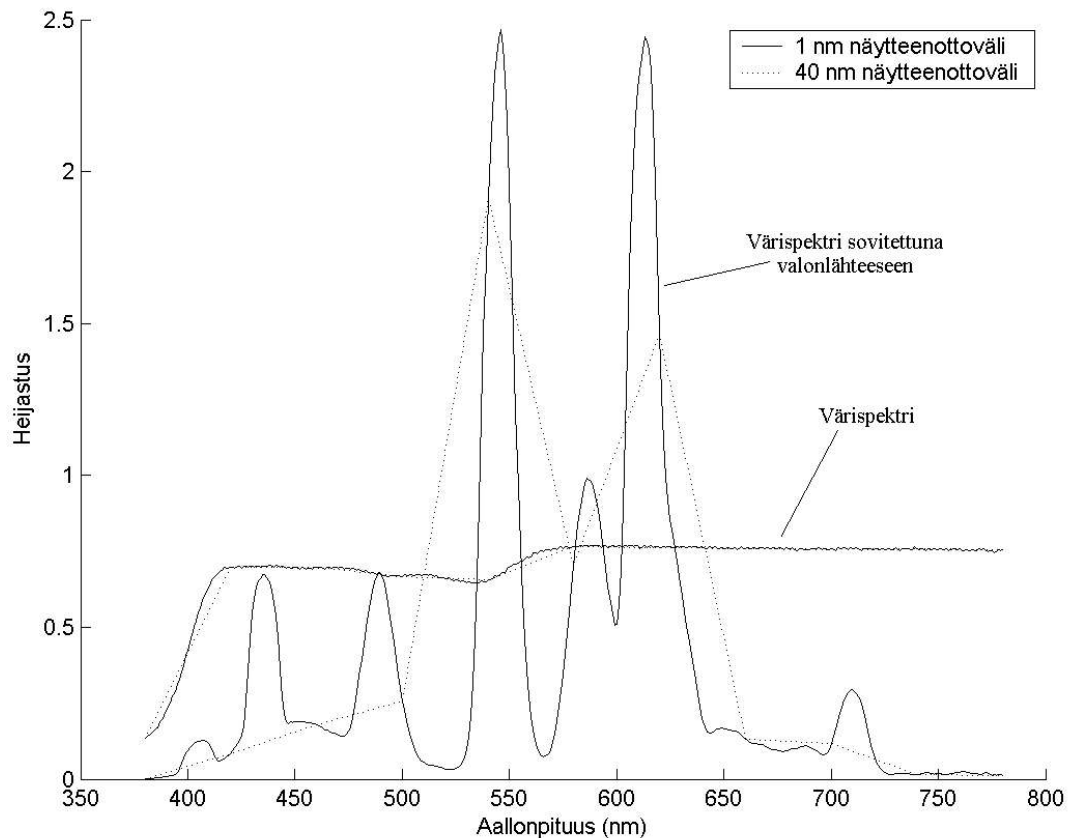
*Kuva 4.2: Taajuustason mittauksissa käytetty Gaussin käyrä.*

## 5. TULOKSET

Tässä luvussa selvitetään ja vertaillaan testiaineiston avulla eri menetelmien ja virhemittojen kokeellisesti antamia tuloksia.

### 5.1 Värispektrin harventaminen

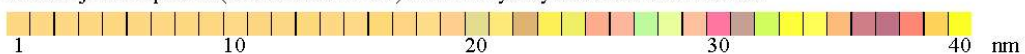
Kuvassa 5.1 on esitetty molemmista värispektrisarjoista yksi esimerkkispektri alkuperäisenä sekä suoraan harvennettuna 40 nm näytteenottoväliin. Kuvan alaosassa on näiden värispektrien sRGB-esitykset eri näytteenottoväleillä aina 40 nm asti. Munsell-sarjan värispektrin sRGB-esitys näyttää samalta väritä kaikilla näytteenottoväleillä, mutta valonlähteen kanssa tulee myös tässä esityksessä selviä vaihteluita heti 19 nm näytteenottovälin jälkeen. Kuvasta ei kuitenkaan nähdä mitään varsinaisia tuloksia sRGB-esityksen rajoittuneen väriesityskyvyn ja laiteriippuvuuden vuoksi, vaan sillä pelkästään havainnollistetaan värispektrin harventamista.



Munsell-sarjan värispektrin sRGB-esitys näytteenottovälin kasvaessa:



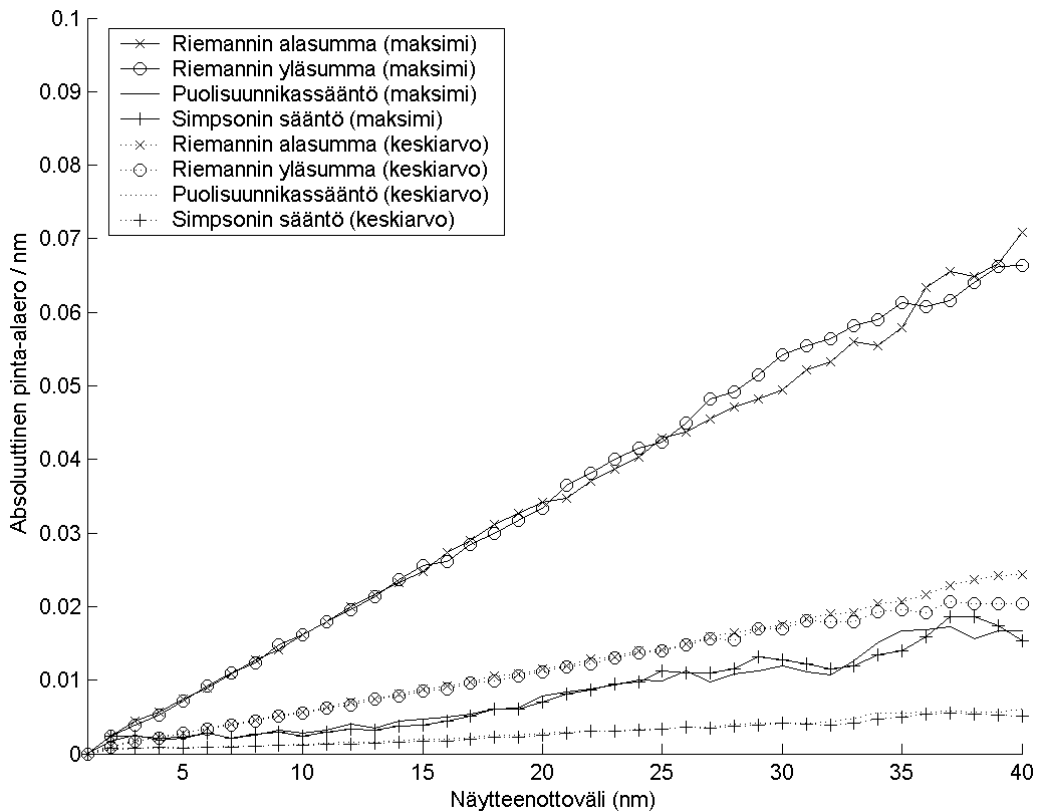
Munsell-sarjan värispektrin (valonlähteen kanssa) sRGB-esitys näytteenottovälin kasvaessa:



Kuva 5.1: Esimerkkejä värispektrin harventamisesta.

## 5.2 Integraalimenetelmä

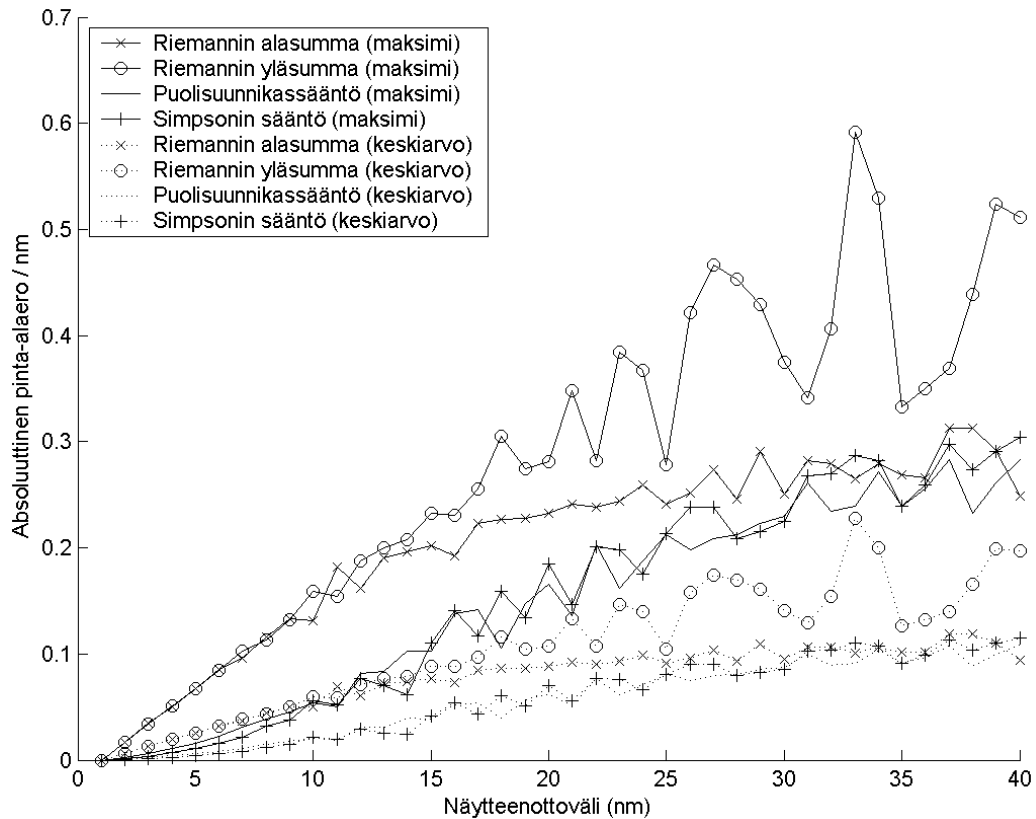
Kuvassa 5.2 on esitetty integrointimenetelmillä lasketut pinta-alaerot eri näytteenottoväleillä Munsell-sarjan värispektreille. Sarjan maksimit eri menetelmillä on merkitty kiinteällä viivalla ja keskiarvot katkoviivalla. Riemannin ylä- ja alasumma antavat huomattavasti erilaisia tuloksia kuin puolisuunnikassääntö ja Simpsonin sääntö. Puolisuunnikassääntö ja Simpsonin sääntö ovat määritelmän mukaisesti tarkempia, joten näitä tuleekin käyttää Riemannin ylä- tai alasumman sijaan. Pinta-alaero on todellisuudessa pienempi kuin mitä Riemannin ylä- tai alasumma antaa ymmärtää. Puolisuunnikassäännön ja Simpsonin säännön tuottamat pinta-alaerot ovat lähellä toisiaan, vaikka Simpsonin sääntö antaa teoriassa huomattavasti tarkemman tuloksen. Tästä seuraa, että siirtymisestä edelleen tarkempiin menetelmiin (esim. Runge-Kutta) ei juurikaan ole hyötyä, ja että puolisuunnikassäännön tai Simpsonin säännön tarkkuus on riittävä.



Kuva 5.2: Munsell-sarjan keskiarvo- ja maksimipinta-alaerot eri näytteenottoväleillä.

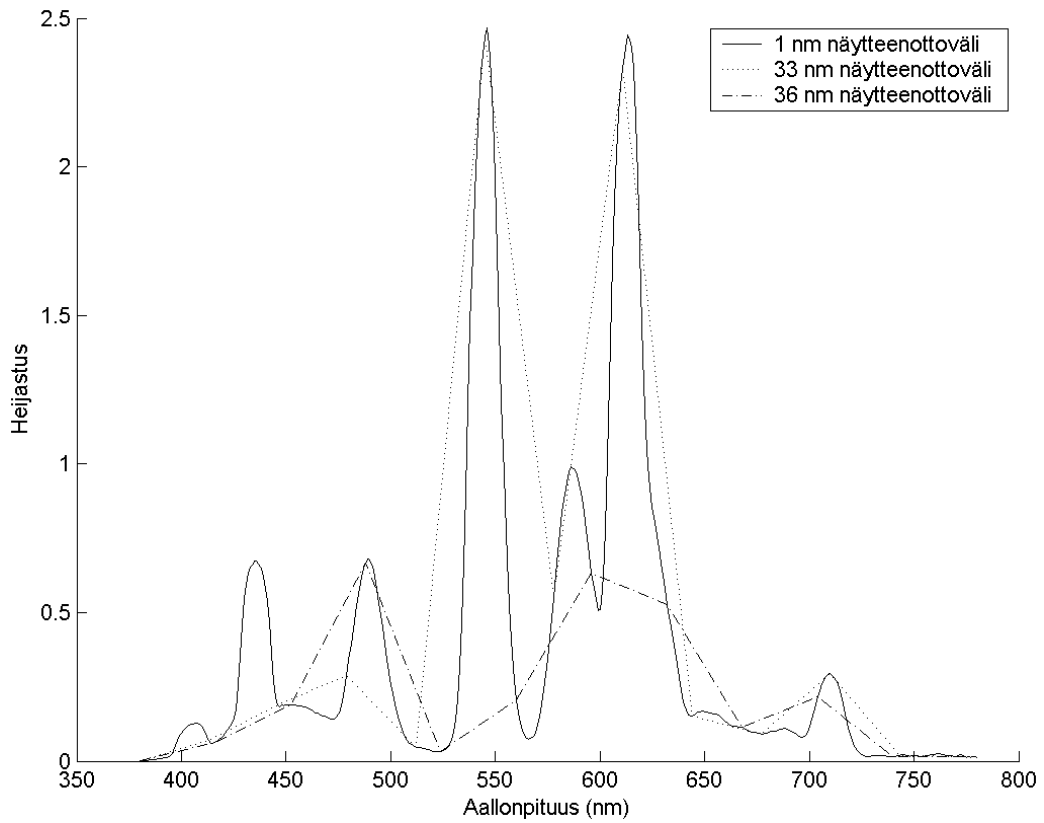
Jos Munsell-sarjaan lisätään valonlähde, ovat tulokset (kuva 5.3) eri integrointimenetelmien kesken samantapaisia. Pinta-alaero on kuitenkin suurempi kuin ilman valonlähdettä. Riemannin ylä- ja alasumma antavat edelleen suuremmat pinta-alaerot kuin puolisuunnikassääntö tai Simpsonin sääntö. Poikkeuksena kuitenkin on, että Riemannin alasumma ensin seuraa Riemannin yläsummaa, mutta käyristyy 15 nm näytteenottovälin jälkeen kohti puolisuunnikas-

säännön ja Simpsonin säännön antamaa pinta-alaeroa. Spektrit ovatkin jokseenkin tasaisia lukuun ottamatta piikkejä, jotka helposti jäävät suurilla näytteenottoväleillä pois laskuista kaikilla muilla menetelmillä paitsi Riemannin yläsummalla.

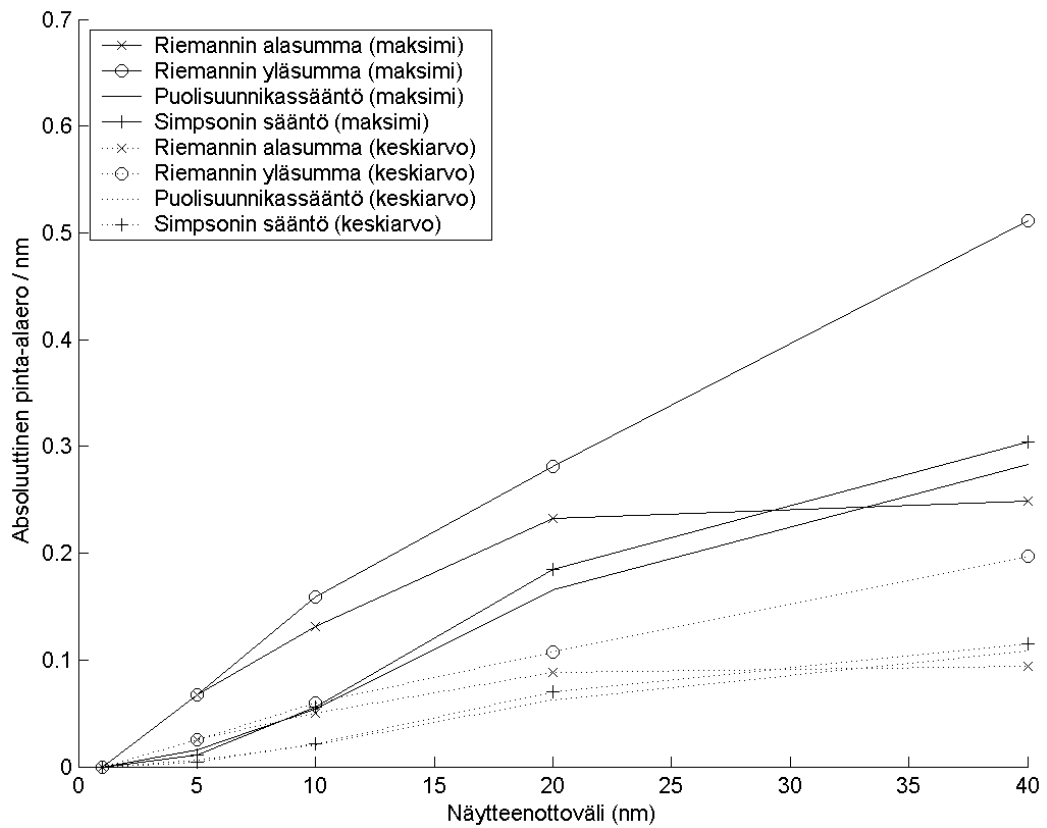


*Kuva 5.3: Munsell-sarjan (valonlähteen kanssa) keskiarvo- ja maksimipinta-alaerot eri näytteenottoväleillä.*

Integraalikäyrät ovat Munsell-sarjalle valonlähteen kanssa n. 9 nm jälkeen piikikkäitä. Piikkisyys johtuu siitä, että eri näytteenottoväleiltä huomioidaan eri värispektrin pisteet. Värispektri valonlähteen kanssa on piikikästä, jolloin integraalilaskuissa jokin tietty piikki huomioidaan tietyllä näytteenottovälillä paremmin kuin jollakin toisella näytteenottovälillä. Kuvassa 5.4 on esimerkkipiikki 1 nm, 33 nm ja 36 nm välein. Värispektri mitattuna 33 nm välein huomioi piikit paremmin kuin 36 nm välein mitattuna, tosin tässä 'kuopat' jäävät taas vähemmälle huomiolle. Sen sijaan, jos harvemmalla välillä mitatun värispektrin kanava-arvojen sijaintien joukko olisi tiheämmän värispektrin kanava-arvojen sijaintien osajoukko, kasvaisi pinta-ala aina näytteenottovälin kasvaessa (kuva 5.5). Lisäksi kuvasta 5.5 nähdään, että puolisuunnikkasääntö antaa hieman pienemmän virheen kuin Simpsonin sääntö.



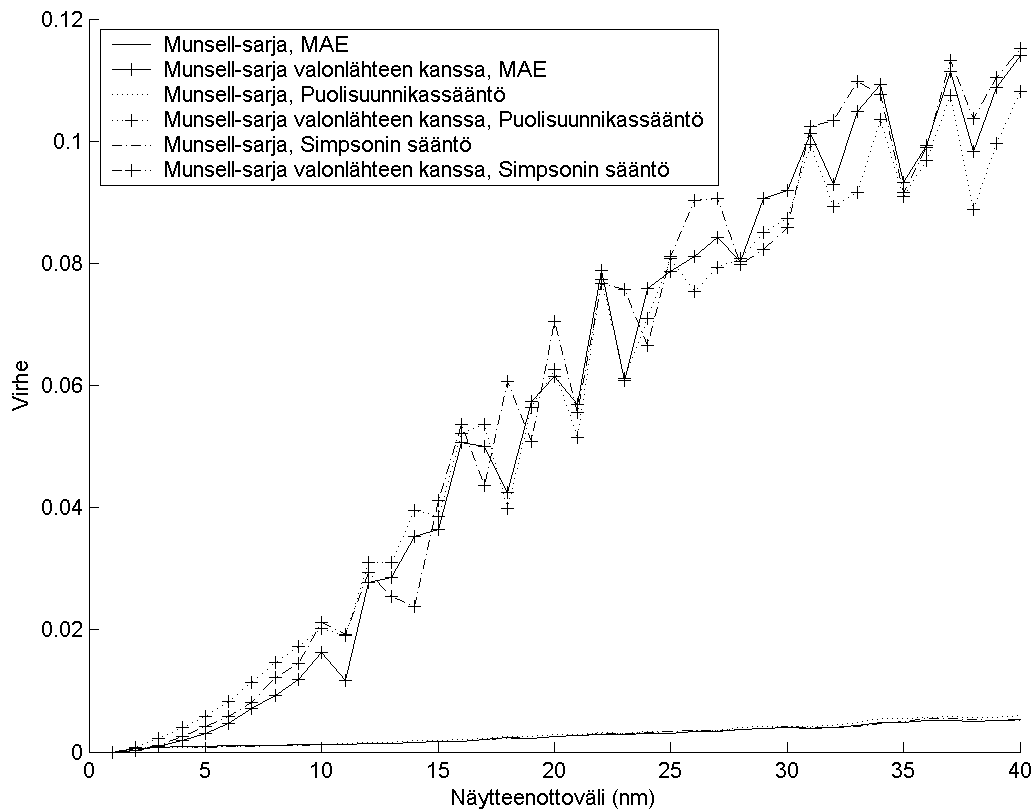
Kuva 5.4: Värispektri harvennettuna 33 nm ja 36 nm näytteenottovälille.



Kuva 5.5: Pinta-alaero kasvaa näytteenottovälin monikertaistuksessa.



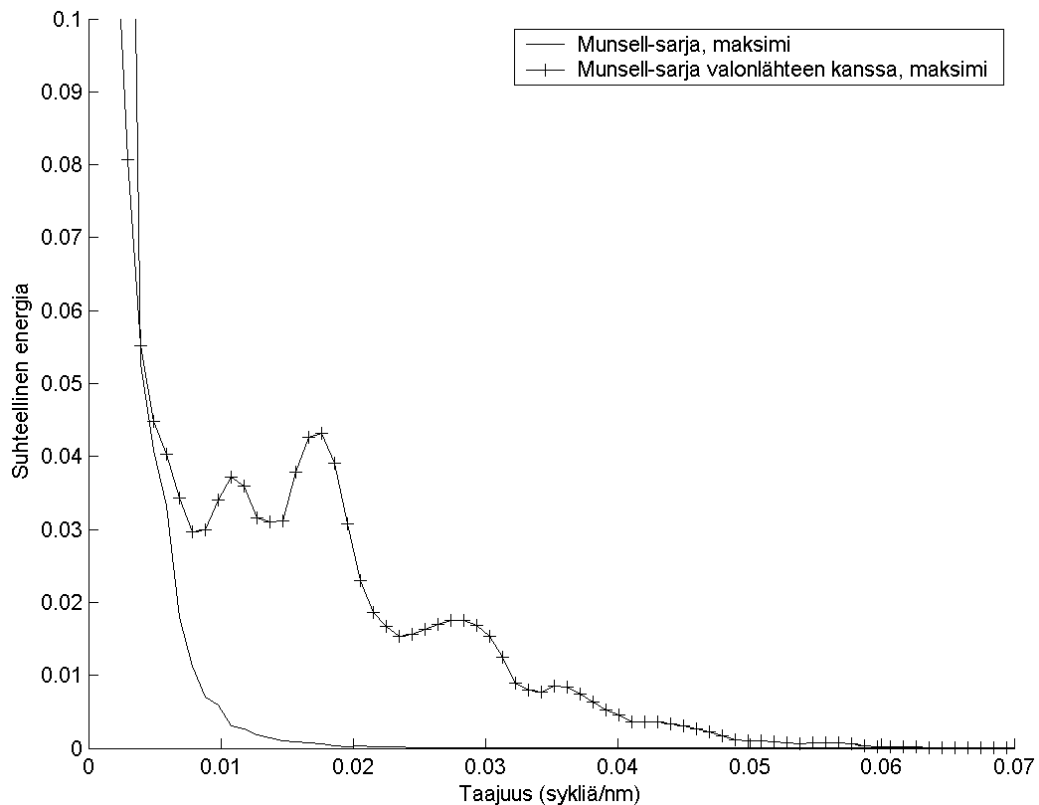
Optimaalista näytteenottoväliä ei kuitenkaan pinta-alaeroista suoraan pysty päättelemään, sillä pinta-alaero on kuvien 5.2-5.3 perusteella lähes suoraan verrannollinen näytteenottoväliin riippumatta käytetystä integrointimenetelmästä. Puolisuunnikassäännöllä ja Simpsonin säännöllä lasketun pinta-alaeron keskiarvo seuraa tarkasti absoluuttista keskivirhettä MAE, kuten kuva 5.6 osoittaa. Integraalimenetelmä toimii siten absoluuttisen keskivirheen tapaan matemaattisena virhemittana. Se arvioi suoraan fyysisen värispektrin muutoksesta syntyvän pinta-alan absoluuttisen muutoksen.



*Kuva 5.6: Absoluuttinen keskivirhe sekä pinta-alaerojen keskiarvo puolisuunnikassäännöllä ja Simpsonin säännöllä laskettuna.*

### 5.3 Taajuustason mittaus

Suhteellisten energiakäyrien maksimi Munsell-sarjoille ilman valonlähdettä ja valonlähteen kanssa on esitetty kuvassa 5.7. Suhteutus on tehty siten, että energiakäyrän summa on 1, jolloin nähdään suoraan energian jakauma eri taajuuksilla. Värispektrin energia putoaa nopeasti lähelle nollaa taajuuden kasvaessa. Alustavana silmämääräisenä tulkintana optimaalinen rajataajuus Munsell-sarjalle ilman valonlähdettä on n. 0,025 sykliä/nm (näytteenottoväli 25 nm) sekä valonlähteen kanssa n. 0,06 sykliä/nm (näytteenottoväli 8 nm), koska tätä rajaa korkeammilla taajuuksilla energia on kuvan perusteella lähes nolla.



Kuva 5.7: Suhteellisten energioiden maksimi.

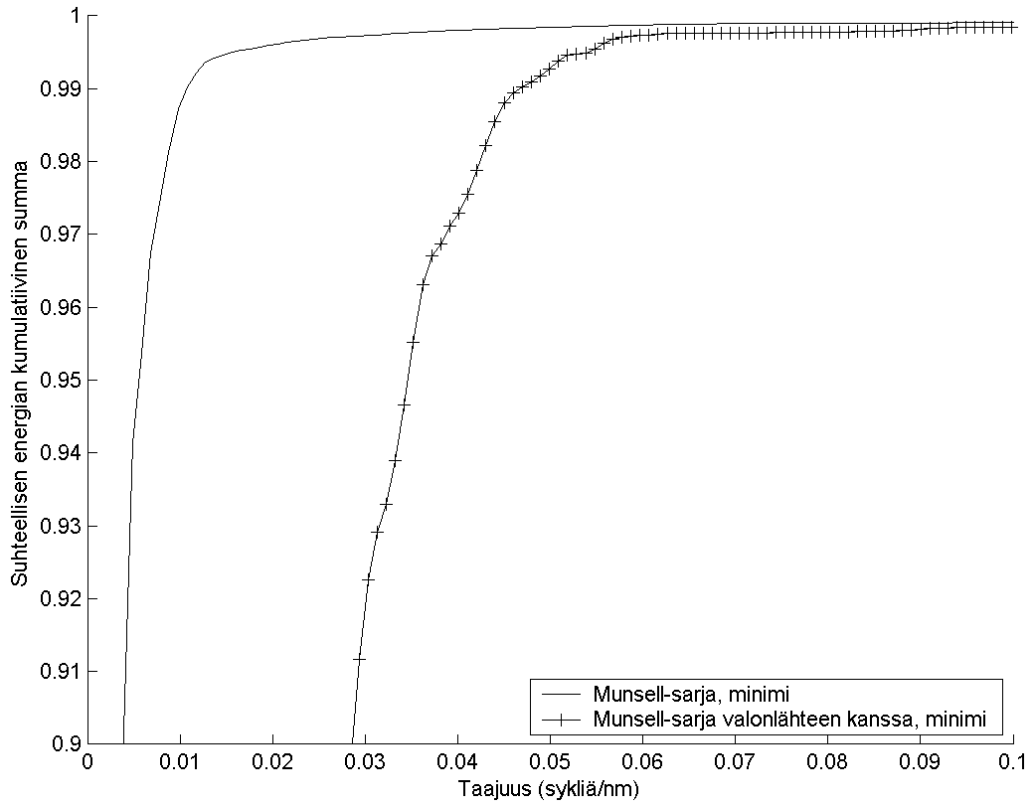
Kuvassa 5.8 on eri värispektrisarjojen energiakäyrien kumulatiivisten summien minimi prosentteina. Koska energia putoaa nopeasti lähelle nollaa, päästään energiakäyrän summassa vastaavasti nopeasti yli 99 prosentin. *Bonnardel & Maloney* [3] käyttävät värispektrien energian kumulatiivisen summan rajana sarjan minimille 99,0% ja 99,9%. Nämä rajat sekä 99,99%-raja on esitetty taulukossa 5.1.

Taulukko 5.1: Matalimmat mahdolliset rajataajuudet (ja vastaavat näytteenottovälit), joilla suhteellisen energian summa ylittää rajan  $E_r$ .

| $E_r$  | Munsell-sarja ilman valonlähdettä |                       | Munsell-sarja valonlähteen kanssa |                       |
|--------|-----------------------------------|-----------------------|-----------------------------------|-----------------------|
|        | Rajataajuus (sykliä/nm)           | Näytteenottoväli (nm) | Rajataajuus (sykliä/nm)           | Näytteenottoväli (nm) |
| 99,00% | 0,011                             | 46                    | 0,047                             | 10                    |
| 99,90% | 0,072                             | 6                     | 0,161                             | 3                     |
| 99,99% | 0,348                             | 1                     | 0,365                             | 1                     |

Sopiva rajataajuus silmämääräisesti kuvasta 5.8 on Munsell-sarjalle ilman valonlähdettä 0,02 sykliä/nm yläpuolella sekä valonlähteen kanssa n. 0,06 sykliä/nm, tosin 0,085...0,1 sykliä/nm välillä tulee vielä pieni nousu. Munsell-sarjalle ilman valonlähdettä taajuuden määrittäminen on vai-

keaa kuvassa näkyvän 0,02...0,07 sykliä/nm alueella olevan loivan nousun vuoksi. *Bonnarde-  
lin & Maloney*n käyttämät rajat 99,0% ja 99,9% eivät pelkästään riitä, vaan oikea kumulatiivi-  
sen energiasumman raja tulee haarukoida. Taulukossa 5.1 nämä kuvasta 5.8 otetut optimaali-  
set rajataajuudet osuvat 99,0% ja 99,9% kumulatiivisen energiasumman väliin, minkä myös  
osoittaa tarvittavan näytteenottovälin suuri muutos näiden energiarajojen välillä.



*Kuva 5.8: Suhteellisten energioiden kumulatiivisten summien minimi.*

Haarukoidaan ensin sopiva näytteenottoväli Munsell-spektrisarjalle ilman valonlähdettä. Tau-  
lukossa 5.2  $E$  on näytteenottoväliä vastaava kertynyt energiasumma ja  $dE$  tämän erotus edelli-  
sellä rivillä olevaan energiasummaan nähden. Taulukosta nähdään, että näytteenottovälin las-  
kiessa tasaisesti energiasumma vastaavasti kasvaa tasaisesti. Hieman suurempi lasku energia-  
summassa tulee 39 nm näytteenottovälin kohdalla. Vertailtavien näytteenottovälien erotus on  
tässä vain 3 nm, mutta silti energiasumman erotus  $dE$  on jopa 0,15%. Lisäksi kuvasta 5.7 so-  
pivaksi näytteenottoväliksi saatiin n. 25 nm.

Taulukko 5.2: Sopivan näytteenottovälin haarukointi Munsell-sarjasta.

| <b>E</b>       | <b>Näytteenottoväli (nm)</b> | <b>dE</b> |
|----------------|------------------------------|-----------|
| <b>99,02%</b>  | 46                           | -         |
| <b>99,22%</b>  | 42                           | 0,20%     |
| <b>99,37%</b>  | 39                           | 0,15%     |
| <b>99,46%</b>  | 34                           | 0,09%     |
| <b>99,53%</b>  | 30                           | 0,07%     |
| <b>99,59%</b>  | 25                           | 0,06%     |
| <b>99,68%</b>  | 20                           | 0,09%     |
| <b>99,76%</b>  | 15                           | 0,08%     |
| <b>99,84%</b>  | 10                           | 0,08%     |
| <b>99,91%</b>  | 5                            | 0,07%     |
| <b>100,00%</b> | 1                            | 0,09%     |

Matalilla taajuuksilla näytteenottovälille tulee pieniä hyppyjä, jonka vuoksi taulukossa ei suurilla näytteenottoväleillä edetä aivan 5 nm välein. Jatkettuna värispektrissä on pisteitä 1024, mistä seuraa energiakäyrälle 512 pistettä 0...0,5 sykliä/nm taajuusalueelle. Koska energiaspektri on symmetrinen, ei yli 0,5 sykliä/nm taajuusaluetta tarvitse huomioida. Esimerkiksi matala taajuus 0,0127 sykliä/nm, johon yksi energiakäyrän piste sijoittuu, vastaa 39 nm näytteenottoa. Seuraavan pisteen taajuus 0,0117 sykliä/nm vastaa 42 nm näytteenottoa. Näytteenottovälejä 40 nm ja 41 nm ei tällä tarkkuudella pysty esittämään.

Kun Munsell-spektrisarjaan lisätään valonlähde, joudutaan käsittelemään huomattavasti pienempiä näytteenottovälejä, jolloin matalien taajuuksien epätarkkuuttakaan näytteenottoväleissä ei enää esiinny. Taulukon 5.3 mukaan energiasumman kasvu hidastuu 8 nm näytteenottovälin jälkeen, tosin vielä 5 nm välillä saadaan energiasummaan pieni nousu Tämä todettiin myös kuvan 5.8 yhteydessä. Vartenotettava näytteenottoväli on Munsell-sarjalle valonlähteen kanssa siten 8 nm tai 5 nm. Pienimmillä näytteenottoväleillä (1...2 nm) on taulukon mukaan havaittavissa värispektrisarjaan sisältyvää kohinaa.

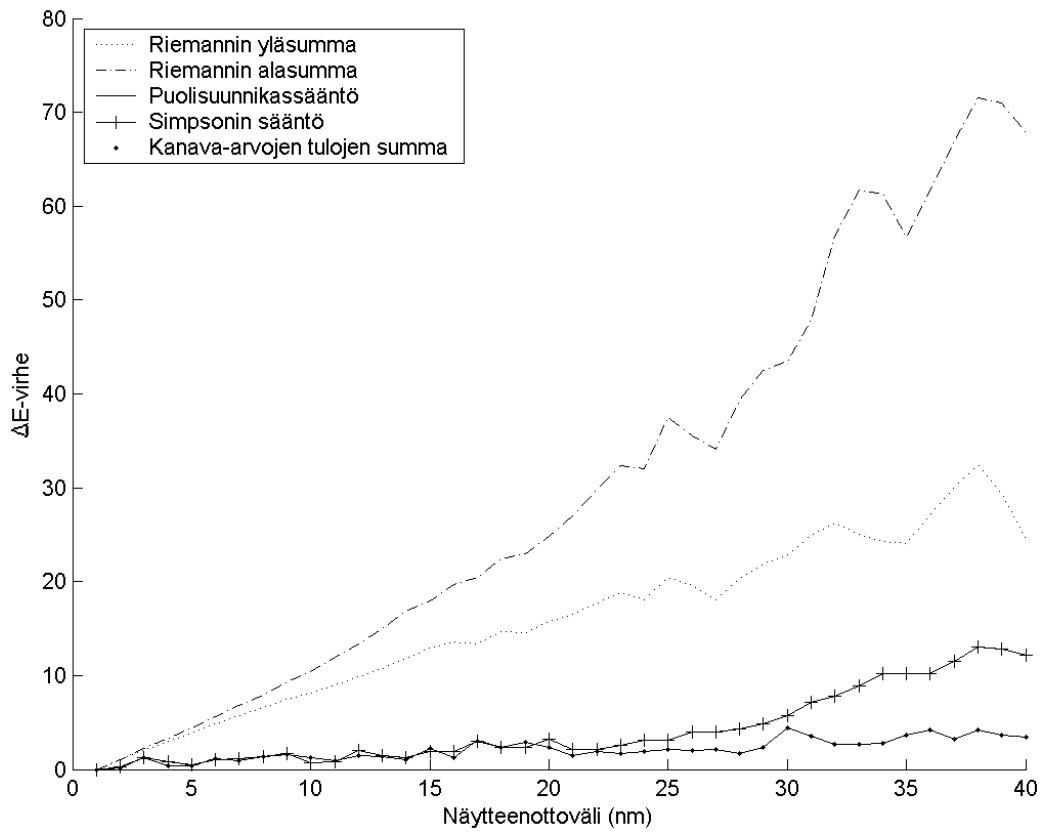
Taulukko 5.3: Sopivan näytteenottovälin haarukointi  
Munsell-sarjasta valonlähteen kanssa.

| <b>E</b>       | <b>Näytteenottoväli (nm)</b> | <b>dE</b> |
|----------------|------------------------------|-----------|
| <b>99,27%</b>  | 10                           | -         |
| <b>99,55%</b>  | 9                            | 0,28%     |
| <b>99,75%</b>  | 8                            | 0,20%     |
| <b>99,76%</b>  | 7                            | 0,01%     |
| <b>99,78%</b>  | 6                            | 0,02%     |
| <b>99,84%</b>  | 5                            | 0,06%     |
| <b>99,88%</b>  | 4                            | 0,04%     |
| <b>99,91%</b>  | 3                            | 0,03%     |
| <b>99,95%</b>  | 2                            | 0,04%     |
| <b>100,00%</b> | 1                            | 0,05%     |

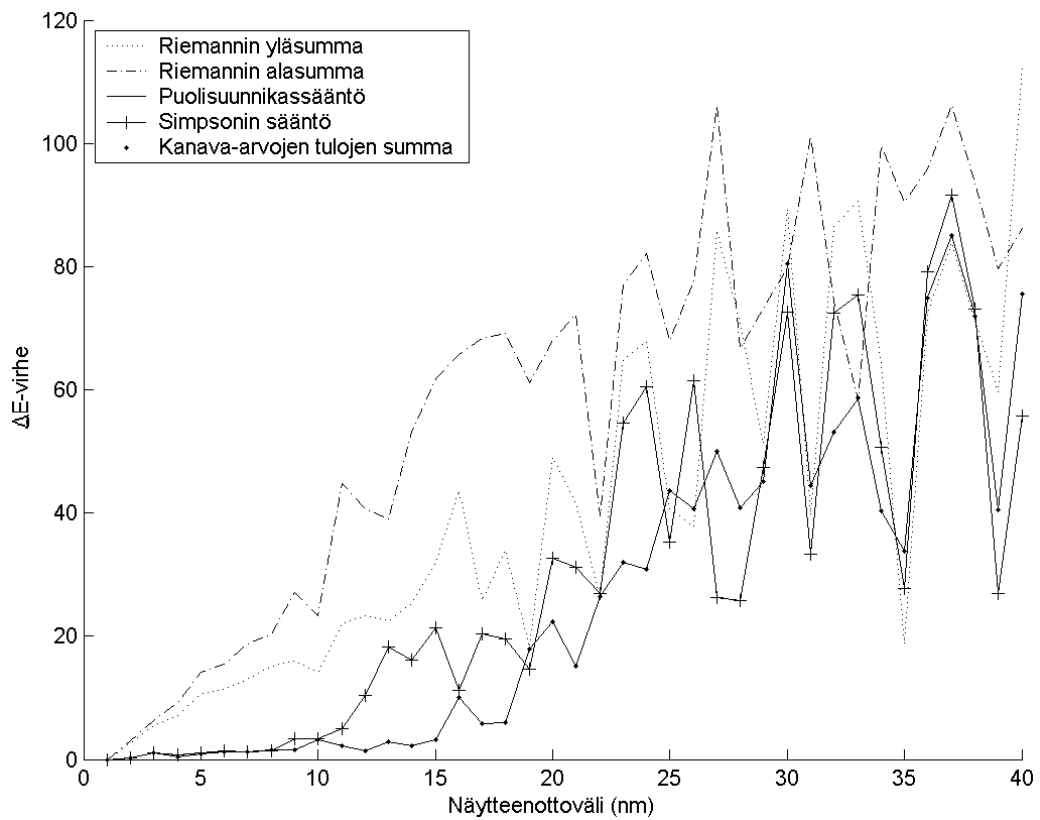
#### 5.4 $\Delta E$ -virhe

Sopivan rajataajuuden etsimisessä tulee ottaa huomioon myös eri virhemittoja. Yksi tällainen on ihmisen näköön perustuva  $\Delta E$ -virhe. Tämä virhe vaatii  $X$ ,  $Y$  ja  $Z$  tristimulusarvojen laskennan, jolloin herää kysymys sopivasta integrointimenetelmästä. Kuvassa 5.9 on laskettu  $\Delta E$ -virheet Munsell-spektreille eri näytteenottoväleillä ja eri integrointimenetelmillä. Riemannin alasummalla ja yläsummalla laskettuna  $\Delta E$ -virhe on suuri. Simpsonin sääntö antaa hyvän tuloksen aina 20 nm asti, jonka jälkeen virhe kasvaa voimakkaasti. Parhaan tuloksen antavat puolisuunnikassääntö ja normaali kanava-arvojen tulojen summa, jotka keskenään antavat likipitäen saman tuloksen. Kaikkiin jatkossa esitettäviin  $\Delta E$ -virhelaskuihin on käytetty standardivalonlähdettä D65.

Munsell-spektreille valonlähteen kanssa käy samalla tavalla Riemannin yläsumman ja alasumman kanssa (kuva 5.10) kuin sarjalle ilman valonlähdettä. Simpsonin sääntö antaa selvästi huonomman tuloksen 9...25 nm näytteenottovälillä, jonka jälkeen  $\Delta E$ -virhe heilahtelee voimakkaasti. Puolisuunnikassääntö ja normaali kanava-arvojen tulojen summa esiintyvät jälleen edulliseksi laskentatavaksi.

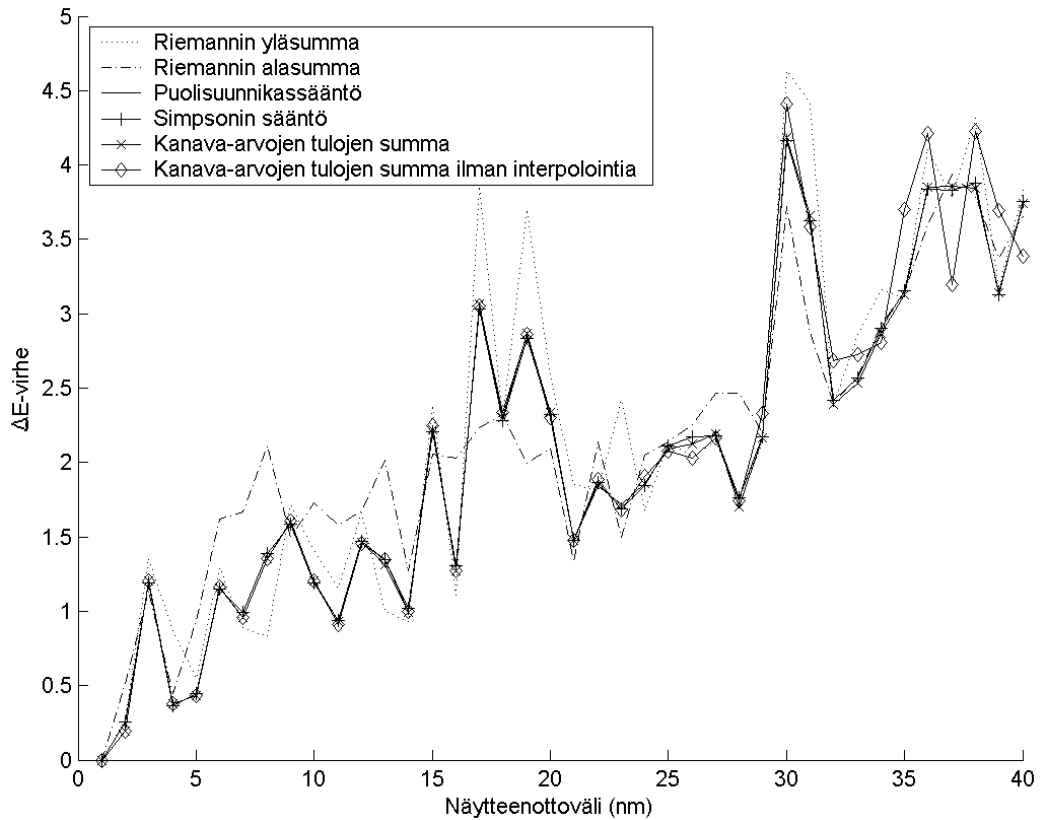


Kuva 5.9: Eri integrointimenetelmillä laskettujen  $\Delta E$ -virheiden maksimit Munsell-sarjalle.

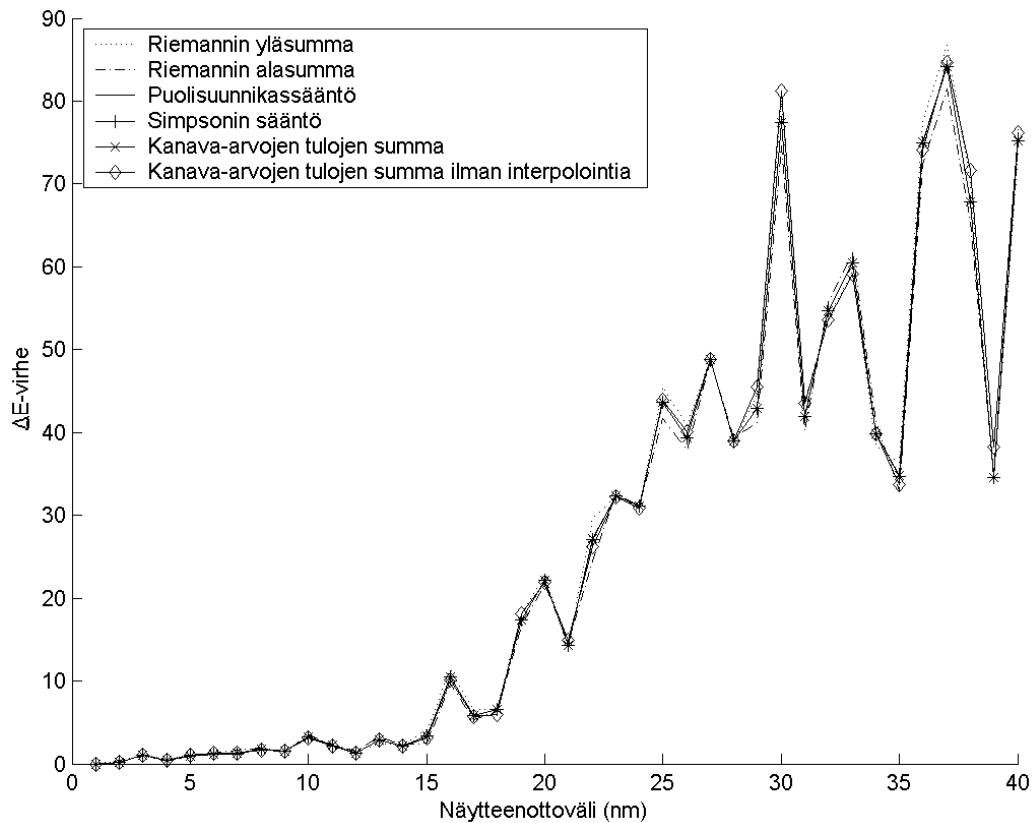


Kuva 5.10: Eri integrointimenetelmillä laskettujen  $\Delta E$ -virheiden maksimit Munsell-sarjalle valonlähteen kanssa.

Fairmanin interpolointi tuottaa kaikilla integrointimenetelmillä keskenään lähes saman  $\Delta E$ -virheen (kuvat 5.11-5.12). Suurimmat eroavaisuudet eri menetelmiin nähden ovat Riemannin yläsummassa ja alasummassa, jotka antavat toisilla näytteenottoväleillä suurempia ja toisilla pienempiä arvoja kuin muut integrointimenetelmät. Suurilla näytteenottoväleillä interpolointi antaa hieman paremman tuloksen Munsell-sarjalle ilman valonlähdettä, mutta yleisesti ottaen  $\Delta E$ -virhe on ei juuri muutu interpoloimattomaan puolisuunnikassääntöön tai kanava-arvojen tulojen summaan nähden.



Kuva 5.11: Eri integrointimenetelmillä laskettujen  $\Delta E$ -virheiden maksimit Fairmanin menetelmällä interpoloidulle Munsell-sarjalle.



Kuva 5.12: Eri integrointimenetelmillä laskettujen  $\Delta E$ -virheiden maksimit Fairmanin menetelmällä interpoloidulle Munsell-sarjalle valonlähteen kanssa.

Keskitytään  $\Delta E$ -virheessä seuraavaksi 0,5-rajaa, sillä ihminen ei pysty erottamaan virhettä, joka on pienempi kuin 0,5. Taulukossa 5.4 on esitetty  $\Delta E$ -virheen keskiarvon ja maksimin 0,5-rajan suurimmat näytteenottovälit. Virheen 0,5-rajaa on laskettu erikseen harvennetuille värispektreille ja Fairmanin menetelmällä interpoloiduille värispektreille käyttäen kanava-arvojen tulojen summaa, puolisuunnikassääntöä ja Simpsonin sääntöä. Taajuustason mittauksissa esiintyneet erityisen huomion saaneet näytteenottovälit ja  $\Delta E$ -virheen keskiarvon 0,5-rajan määräämät näytteenottovälit ovat lähellä toisiaan. Sen sijaan Munsell-sarjoilla  $\Delta E$ -virheen maksimin 0,5-rajaa vaatii lähes alkuperäiset värispektrit lähinnä sarjoissa esiintyvän kohinan vuoksi. Simpsonin sääntö ei kuitenkaan osoittautu laskennassa hyväksi valinnaksi, koska tällä saatiin 0,5-rajalle selvästi pienempi näytteenottoväli muihin menetelmiin verrattuna.



Taulukko 5.4: Suurin näytteenottoväli, missä (ja mitä pienemmillä näytteenottoväleillä)  $\Delta E$ -virhe on pienempi kuin 0,5.

| Näytteenottoväli (nm)  | Munsell-sarja ilman valonlähdettä |         | Munsell-sarja valonlähteen kanssa |         |
|--|-----------------------------------|---------|-----------------------------------|---------|
|  | Keskiarvo                         | Maksimi | Keskiarvo                         | Maksimi |
| $\Delta E < 0,5$   |                                   |         |                                   |         |
| Suoraan harvennetut värispektrit, kanava-arvojen tulojen summa | 29                                | 2       | 7                                 | 2       |
| Suoraan harvennetut värispektrit, puolisuunnikassääntö         | 29                                | 2       | 7                                 | 2       |
| Suoraan harvennetut värispektrit, Simpsonin sääntö             | 22                                | 2       | 4                                 | 2       |
| Fairmanin interpolointi, kanava-arvojen tulojen summa          | 29                                | 2       | 7                                 | 2       |
| Fairmanin interpolointi, puolisuunnikassääntö                  | 29                                | 2       | 7                                 | 2       |
| Fairmanin interpolointi, Simpsonin sääntö                      | 29                                | 2       | 7                                 | 2       |

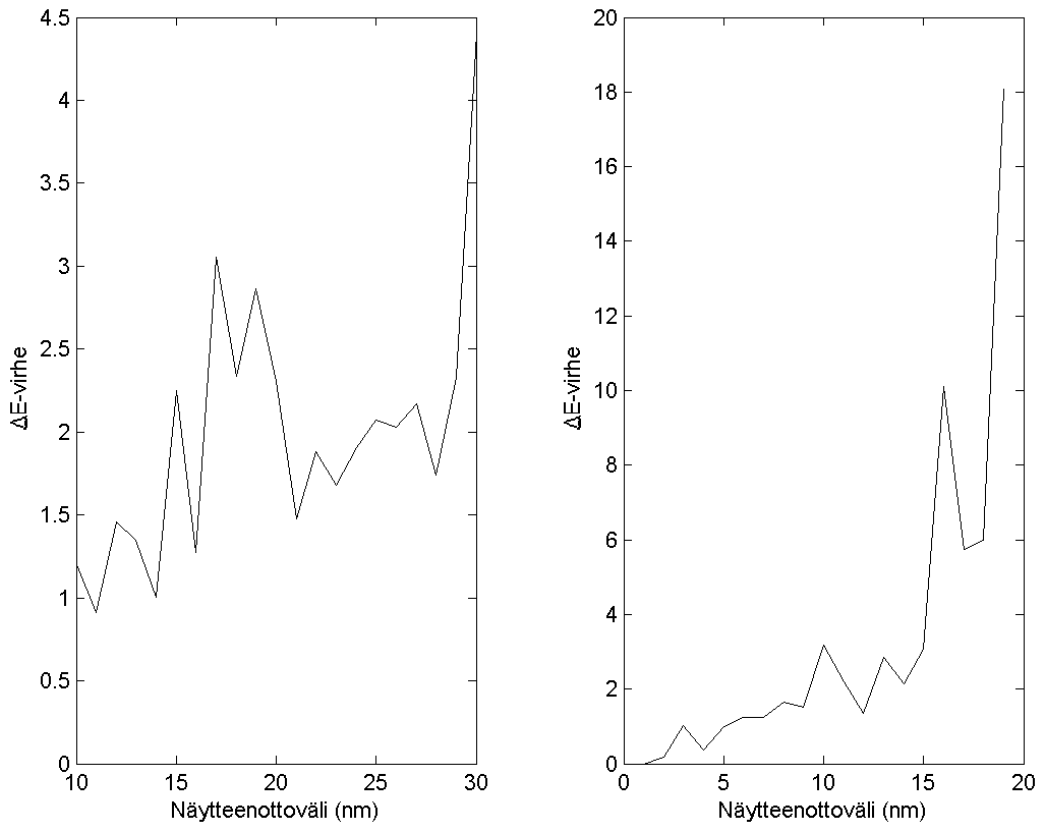
Taulukkoon 5.5 on poimittu eri näytteenottovälejä sekä niitä vastaavat  $\Delta E$ -virheiden maksimit. Virheet ovat lähes samoja menetelmästä riippumatta lukuun ottamatta Simpsonin sääntöä, joka yleisesti tuottaa suuremman virheen. Fairmanin interpolointi esiintyy edukseen 39 nm näytteenottovälillä Munsell-sarjalle ilman valonlähdettä sekä Simpsonin säännöllä lasketulle virheelle, mutta muuten saadaan lähes samat tulokset kuin ilman interpolointiakin. Kun Simpsonin sääntö jätetään toimimattomana menetelmänä huomiotta, ovat  $\Delta E$ -virheet kaikissa esitetyissä näytteenottoväleissä kelvollisia lukuun ottamatta 39 nm näytteenottoväliä Munsell-sarjalle ilman valonlähdettä sekä 10 nm näytteenottoväliä Munsell-sarjalle valonlähteen kanssa. Näillä näytteenotoilla  $\Delta E$ -virhe kasvaa voimakkaasti ja on jo yli 3,0.

Taulukko 5.5:  $\Delta E$ -virheiden maksimi valituilla näytteenottoväleillä.

| $\Delta E$ -virheiden maksimi   | Munsell-sarja ilman valonlähdettä |     |     |      | Munsell-sarja valonlähteen kanssa |     |     |      |      |
|---|-----------------------------------|-----|-----|------|-----------------------------------|-----|-----|------|------|
|   | 10                                | 20  | 29  | 39   | 5                                 | 9   | 10  | 12   | 14   |
| <b>Näytteenottoväli (nm)</b>  |                                   |     |     |      |                                   |     |     |      |      |
| <b>Suoraan harvennetut värispektrit, kanava-arvojen tulojen summa</b> | 1,2                               | 2,3 | 2,3 | 3,7  | 1,0                               | 1,5 | 3,2 | 1,3  | 2,2  |
| <b>Suoraan harvennetut värispektrit, puolisuunnikassääntö</b>         | 1,2                               | 2,3 | 2,3 | 3,7  | 1,0                               | 1,5 | 3,2 | 1,3  | 2,2  |
| <b>Suoraan harvennetut värispektrit, Simpsonin sääntö</b>             | 0,9                               | 3,3 | 6,2 | 10,5 | 1,1                               | 3,4 | 3,3 | 10,5 | 15,8 |
| <b>Fairmanin interpolointi, kanava-arvojen tulojen summa</b>          | 1,2                               | 2,3 | 2,2 | 3,1  | 1,0                               | 1,5 | 3,3 | 1,3  | 2,2  |
| <b>Fairmanin interpolointi, puolisuunnikassääntö</b>                  | 1,2                               | 2,3 | 2,2 | 3,1  | 1,0                               | 1,5 | 3,3 | 1,3  | 2,2  |
| <b>Fairmanin interpolointi, Simpsonin sääntö</b>                      | 1,2                               | 2,3 | 2,2 | 3,1  | 1,0                               | 1,5 | 3,3 | 1,3  | 2,2  |

Kuva 5.13 (vasen puoli) näyttää  $\Delta E$ -virheiden maksimit Munsell-sarjalle ilman valonlähdettä 10...30 nm näytteenottoväleiltä. Raja  $\Delta E < 2,0$  löytyy 14 nm näytteenottoväliltä, tosin on suurempiakin näytteenottovälejä (16 nm, 21...24 nm, 28 nm), jotka toteuttavat tämän rajan. Näytteenotto on tässä jo niin suuri, että tarkemman analyysin tekeminen ei ole mielekästä varsinkin, kun värispektrejä yleensä mitataan 10 nm välein. On selvää, että 10 nm näytteenotto riittää erinomaisesti Munsell-sarjalle ilman valonlähdettä, ja vielä 29 nm antaa kelvollisen tuloksen.

Taulukosta 5.5 nähdään selvästi optimaalinen näytteenottoväli Munsell-sarjalle valonlähteen kanssa. Vielä 9 nm välillä saadaan pieni  $\Delta E$ -virhe, mutta 10 nm väli antaa virheeksi jo 3,2. Yli 10 nm jälkeisiltä näytteenottoväleiltä erottuu 12 nm ja 14 nm, joissa on kelvollisen suuruinen  $\Delta E$ -virhe, mutta muut yli 9 nm näytteenottovälit antavat suuren virheen. Kuvasta 5.13 (oikea puoli) nähdään, että  $\Delta E$ -virhe alkaa kasvaa voimakkaasti heti 14 nm näytteenottovälin jälkeen. Toisaalta, vaikka  $\Delta E$ -virhe on kelvollinen 12 nm ja 14 nm kohdalla, alkoi taajuustason mitauksessa syntyä merkittävää energiahäviötä heti 8 nm välin jälkeen (taulukko 5.3).



*Kuva 5.13:  $\Delta E$ -virheen maksimi eri näytteenottoväleillä Munsell-sarjalle ilman valonlähdettä (vasemmalla) ja valonlähteen kanssa (oikealla).*

### 5.5 Pinta-alaero valituilla näytteenottoväleillä

Värispektrin kanava-arvon teoreettinen maksimi on 1,0. Kuitenkin valonlähteen kanssa todellinen maksimi voi olla suurempi. Koska värispektrit on skaalattu  $Y_C C_r$ -koordinaatiston Y-komponentin mukaan, voivat värispektriin piikit olla hyvinkin korkeita. Munsell-sarjan todellinen maksimi onkin 2,7422. Näin ollen sarjojen pinta-alaeroja on vaikea vertailla keskenään. Huomionarvoista kuitenkin on, että pinta-alaero Munsell-sarjalle valonlähteen kanssa alkoi olla piikikästä 9 nm näytteenottovälin jälkeen, minkä jälkeen myös  $\Delta E$ -virhe alkoi nousta voimakkaasti.

Kun värispektriin kanava-arvot jaetaan sarjan kanava-arvojen maksimin kanssa, voidaan alustava vertailu tehdä, joskaan se ei kelpaa suorien johtopäätösten tekemiseen. Näiden suhteellisten värispektriin pinta-alaerojen maksimit on esitetty puolisuunnikasäännöllä ja Simpsonin säännöllä laskettuna taulukossa 5.6. Taulukosta nähdään, että kaikki pinta-alaerot ovat alle 0,02 lukuun ottamatta 12 nm ja 14 nm näytteenottovälejä Munsell-sarjalle valonlähteen kanssa.

Taulukko 5.6: Suhteellisten värispektrien pinta-alaerot valituilla näytteenottoväleillä.

|  | Näytteenottoväli (nm) | Puolisuunnikas-säännöllä laskettu suhteellisten spektrien pinta-alaero (maksimi) | Simpsonin säännöllä laskettu suhteellisten spektrien pinta-alaero (maksimi) |
|--|-----------------------|--|---|
| <b>Munsell-sarja ilman valonlähdettä</b> | 10                    | 0,003  | 0,003   |
|  | 29                    | 0,011  | 0,016   |
|  | 39                    | 0,017  | 0,017   |
| <b>Munsell-sarja valonlähteen kanssa</b> | 5                     | 0,006  | 0,004   |
|  | 8                     | 0,014  | 0,012   |
|  | 9                     | 0,017  | 0,014   |
|  | 12                    | 0,030  | 0,028   |
|  | 14                    | 0,038  | 0,023   |

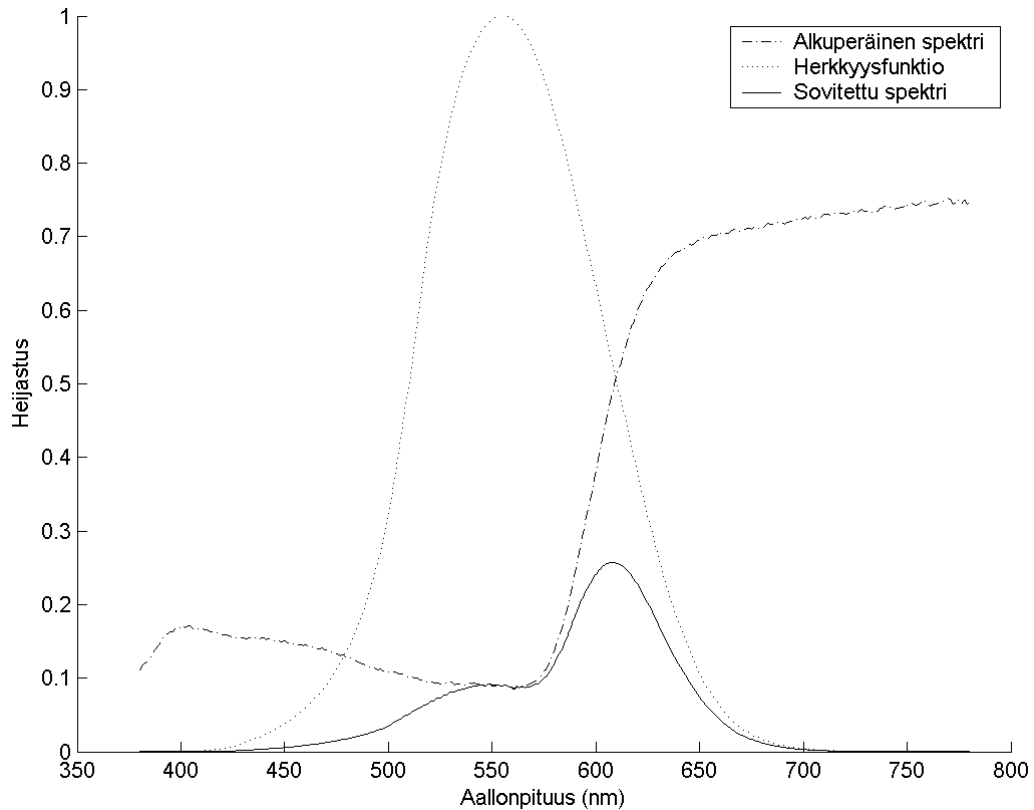
Taulukkoon 5.7 on laskettu suurin mahdollinen näytteenottoväli, missä (ja mitä pienemmällä näytteenottoväleillä) vastaava integraaliero suhteutetun sarjan kaikilla värispektreillä on pienempi kuin 0,01. Saadut näytteenottovälit ovat hieman pienemmät kuin taajuustason ja  $\Delta E$ -virheen laskennan yhteydessä valitut näytteenottovälit, jolloin tämän suuruinen virhe (teoreettiseen valkoiseen värispektriin nähden) voisi olla jonkinlainen sallittu virheraja. Suoraa yhtäläisyyttä taajuustasoon ja  $\Delta E$ -virheeseen ei virherajalla kuitenkaan ole, jolloin pinta-alaeroja tulee käsitellä lähinnä suuntaa antavana mittana.

Taulukko 5.7: Suurin näytteenottoväli (nm), missä (ja mitä pienemmällä näytteenottoväleillä) suhteellisten värispektrien pinta-alaero on pienempi kuin 0,01.

| Suhteellisten värispektrien pinta-alaero < 0,01 | Munsell-sarja ilman valonlähdettä | Munsell-sarja valonlähteen kanssa |
|---|-----------------------------------|-----------------------------------|
| <b>Puolisuunnikassääntö</b>                     | 21                                | 6                                 |
| <b>Simpsonin sääntö</b>                         | 21                                | 7                                 |

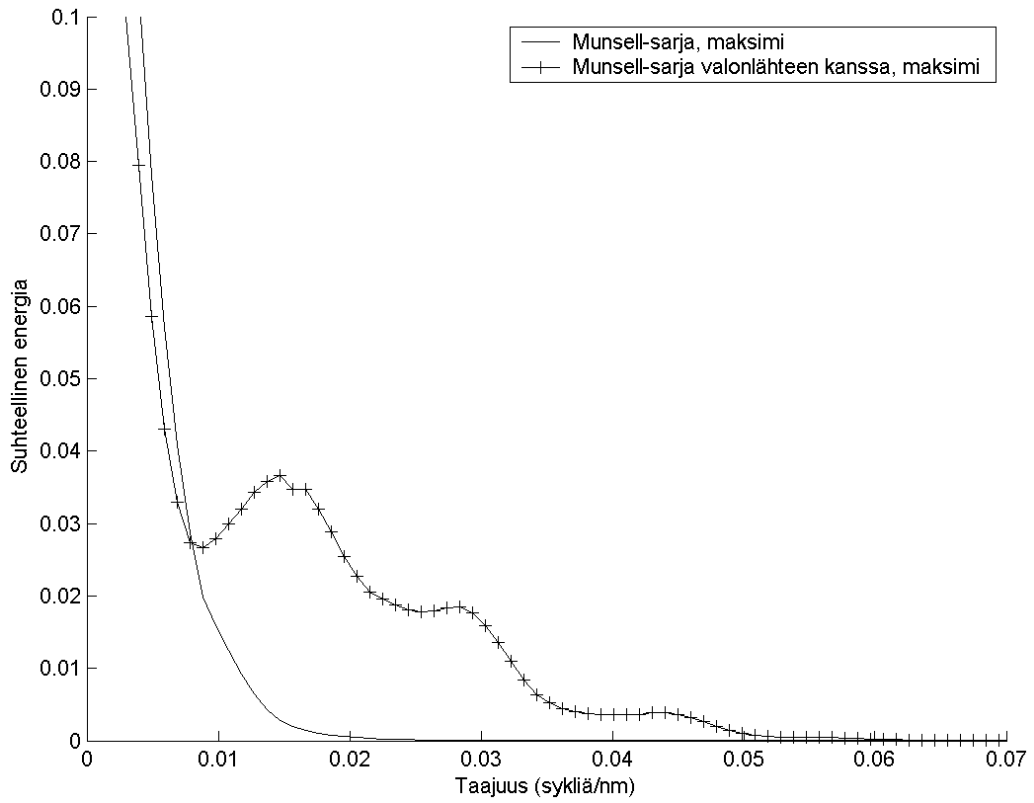
## 5.6 Ihmisen silmän herkkyyssäikä

Kerrottaessa värispektrin kanava-arvot ihmisen herkkyyssfunktion (CIE-värisovitusfunktioiden y-komponentti) vastaavien aallonpituuksien kanava-arvoilla, saadaan värispektri sovitettua ihmisen silmälle. Kuvassa 5.14 on esimerkkispektri sekä herkkyyssfunktion, jotka kerrottuna kanava-arvoittain keskenään tuottavat sovitetun värispektrin. Herkkyyssfunktion korostaa värispektrin keskialuetta taivuttaen värispektrin päitä kohti aallonpituusakselia.

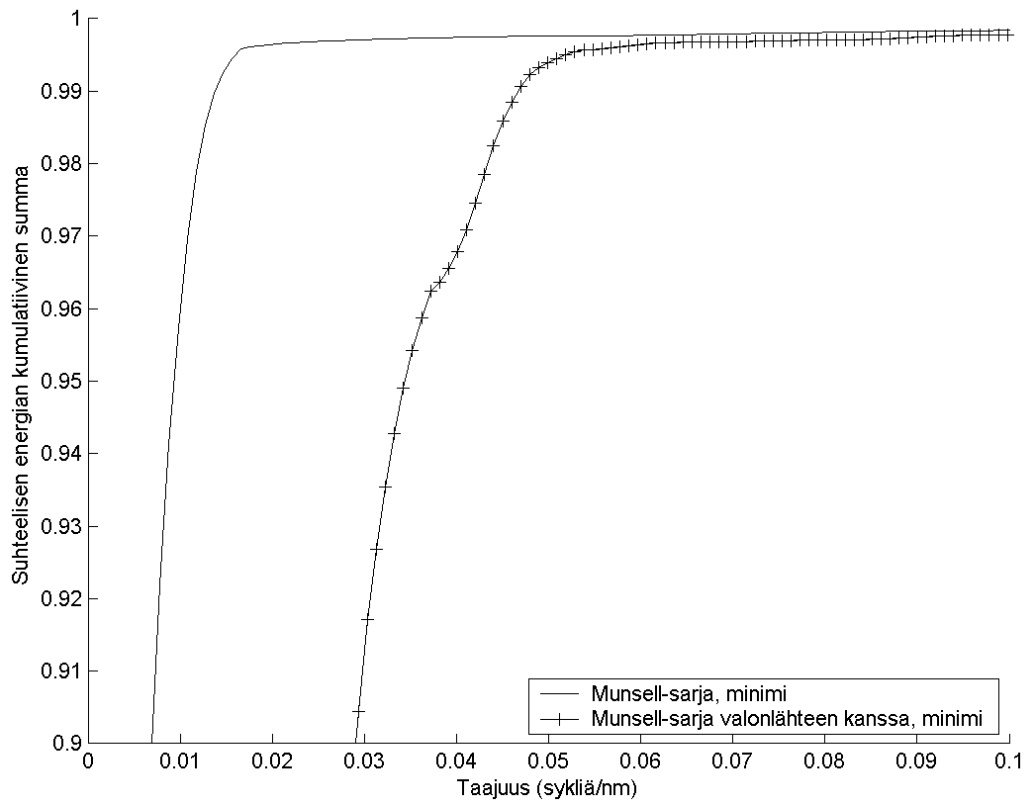


*Kuva 5.14: Värispektrin sovittaminen herkkyyshunktion kanssa.*

Tarkastellaan jälleen värispektrisarjojen energioiden maksimia eri taajuuksilla. Kuvien 5.15 ja 5.16 esittämät energiat ja energiasummakäyrät ovat hieman sileämpiä verrattuna aikaisemmin esitettyihin kuvien 5.7 ja 5.8 mukaisiin energia- ja energiasummakäyriin. Kuvasta 5.15 voidaan päätellä silmämääräisesti optimaaliseksi rajataajuudeksi 0,025 sykliä/nm Munsell-sarjalle ilman valonlähdettä ja 0,06 sykliä/nm Munsell-sarjalle valonlähteen kanssa. Niin ikään kuvasta 5.16 saadaan sopivaksi rajataajuudeksi 0,02...0,03 sykliä/nm Munsell-sarjalle ilman valonlähdettä sekä n. 0,06 sykliä/nm Munsell-sarjalle valonlähteen kanssa. Valonlähteen kanssa energiasummaan tulee vielä pieni nousu 0,08...0,09 sykliä/nm taajuudella. Nämä arviot ovat likipitään samoja kuin värispektreille ilman herkkyyshunktiota. Kuitenkin Munsell-sarjalla ilman valonlähdettä kumulatiivisen summan käännekohta, missä energian kasvu vähenee huomattavasti rajataajuuden kasvaessa, on selvästi jyrkempi, jolloin optimaalinen näytteenottovälikin on helpompi löytää.



*Kuva 5.15: Suhteellisten energioiden maksimi.*



*Kuva 5.16: Suhteellisten energioiden kumulatiivisten summien minimi.*

Etsitään jälleen haarukoinnilla sopivat näytteenottovälit (taulukot 5.8-5.9). Menetelmä on täsmälleen sama kuin luvussa 5.3 eri värispektrisarjoille ilman herkkyysfunktiota. Munsell-sarjalle sopiva näytteenotto on n. 30 nm ilman valonlähdettä sekä 9 nm valonlähteen kanssa, koska tämän jälkeen näytteenottovälin kasvaessa energiasumma alkaa pienentyä nopeasti. Niin ikään korkeilla taajuuksilla on edelleen jonkin verran energiaa värispektreissä esiintyvän kohinan vuoksi, mikä vaikuttaa jo 5 nm näytteenottoväliin asti Munsell-sarjalla valonlähteen kanssa. Tämä myös viittaa siihen, että 5 nm kohdalla oleva rajataajuuden nousu sarjalle ilman herkkyyskäyrää (kuva 5.8 ja taulukko 5.3) on lähinnä kohinasta johtuva.

*Taulukko 5.8: Sopivan näytteenottovälin haarukointi Munsell-sarjasta.*

| <b>E</b>       | <b>Näytteenottoväli (nm)</b> | <b>dE</b> |
|----------------|------------------------------|-----------|
| <b>98,54%</b>  | 39                           | -         |
| <b>99,25%</b>  | 34                           | 0,71%     |
| <b>99,58%</b>  | 30                           | 0,33%     |
| <b>99,64%</b>  | 25                           | 0,06%     |
| <b>99,68%</b>  | 20                           | 0,04%     |
| <b>99,72%</b>  | 15                           | 0,04%     |
| <b>99,76%</b>  | 10                           | 0,04%     |
| <b>99,84%</b>  | 5                            | 0,08%     |
| <b>99,88%</b>  | 4                            | 0,04%     |
| <b>99,90%</b>  | 3                            | 0,02%     |
| <b>99,93%</b>  | 2                            | 0,03%     |
| <b>100,00%</b> | 1                            | 0,07%     |

*Taulukko 5.9: Sopivan näytteenottovälin haarukointi Munsell-sarjasta valonlähteen kanssa.*

| <b>E</b>       | <b>Näytteenottoväli (nm)</b> | <b>dE</b> |
|----------------|------------------------------|-----------|
| <b>98,58%</b>  | 11                           | -         |
| <b>99,40%</b>  | 10                           | 0,82%     |
| <b>99,58%</b>  | 9                            | 0,18%     |
| <b>99,66%</b>  | 8                            | 0,08%     |
| <b>99,69%</b>  | 7                            | 0,03%     |
| <b>99,71%</b>  | 6                            | 0,02%     |
| <b>99,77%</b>  | 5                            | 0,06%     |
| <b>99,80%</b>  | 4                            | 0,03%     |
| <b>99,85%</b>  | 3                            | 0,05%     |
| <b>99,92%</b>  | 2                            | 0,07%     |
| <b>100,00%</b> | 1                            | 0,08%     |

Taulukossa 5.10 on esitetty taulukon 5.4 tapaan ne suurimmat näytteenottovälit, missä (ja mitä pienemmillä näytteenottoväleillä)  $\Delta E$ -virhe on pienempi kuin 0,5. Simpsonin sääntö ei edelleenkään anna keskiarvon osalta hyvää tulosta muihin menetelmiin nähden. Fairmanin interpolointi parantaa virheen keskiarvoa kasvattaen tarvittavan näytteenottovälin 24 nm välistä 29 nm väliin.  $\Delta E$ -virheen maksimi vaatii edelleen menetelmästä riippumatta 2 nm näytteenoton. Yleisesti ottaen tulokset ovat samat kuin ilman herkkyysfunktioita, sillä 24 nm näytteenottovälin vaatimus 0,5-keskiarvorajalla ilman interpolointia johtuu yksittäisestä 0,5-ajan ylittävästä virheestä 25 nm näytteenottovälillä, joka saadaan tämän sarjan tapauksessa korjattua Fairmanin interpoloinnilla. Yleisesti ottaen Fairmanin interpolointi ei kuitenkaan osoittaudu hyödylliseksi.

*Taulukko 5.10: Suurin näytteenottoväli, missä (ja mitä pienemmillä näytteenottoväleillä)  $\Delta E$ -virhe on pienempi kuin 0,5.*

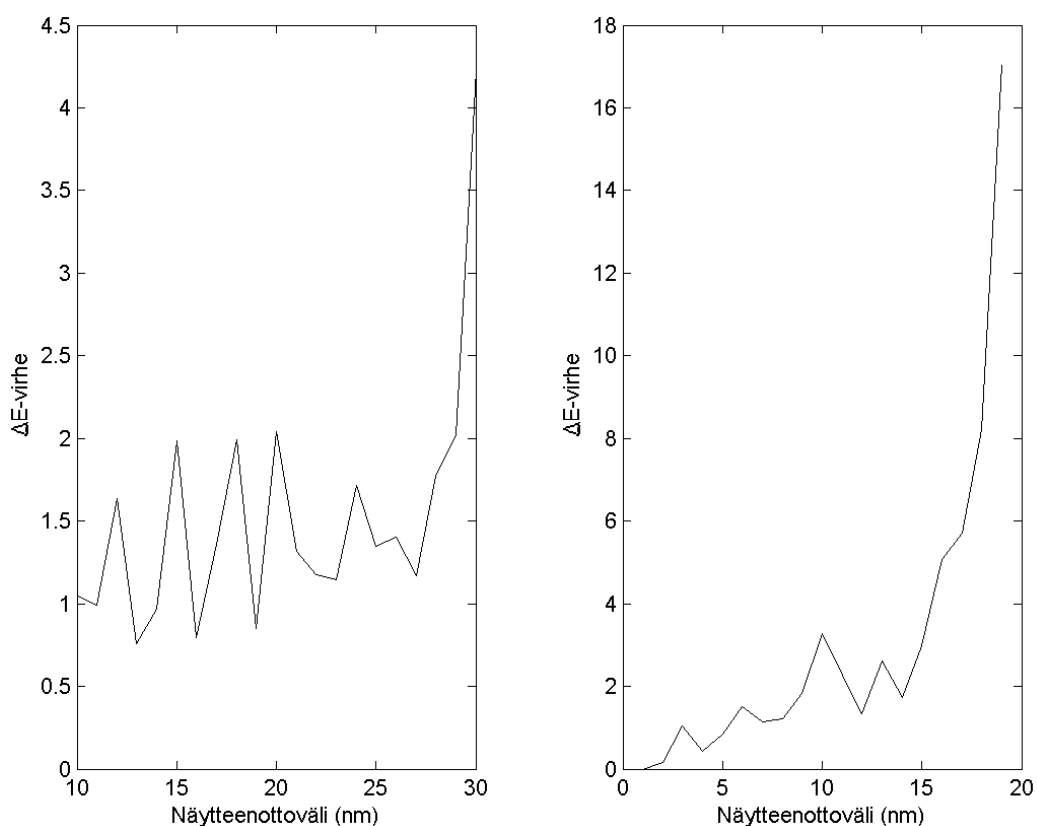
| Näytteenottoväli (nm)   | Munsell-sarja ilman valonlähdettä |         | Munsell-sarja valonlähteen kanssa |         |
|---|-----------------------------------|---------|-----------------------------------|---------|
|   | Keskiarvo                         | Maksimi | Keskiarvo                         | Maksimi |
| $\Delta E < 0,5$  |                                   |         |                                   |         |
| <b>Suoraan harvennetut värispektrit, kanava-arvojen tulojen summa</b> | 24                                | 2       | 7                                 | 2       |
| <b>Suoraan harvennetut värispektrit, puolisuunnikassääntö</b>         | 24                                | 2       | 7                                 | 2       |
| <b>Suoraan harvennetut värispektrit, Simpsonin sääntö</b>             | 18                                | 2       | 4                                 | 2       |
| <b>Fairmanin interpolointi, kanava-arvojen tulojen summa</b>          | 29                                | 2       | 7                                 | 2       |
| <b>Fairmanin interpolointi, puolisuunnikassääntö</b>                  | 29                                | 2       | 7                                 | 2       |
| <b>Fairmanin interpolointi, Simpsonin sääntö</b>                      | 29                                | 2       | 7                                 | 2       |

Taulukko 5.11 ja kuva 5.17 osoittavat Munsell-sarjalle ilman valonlähdettä loistavan tuloksen 10 nm näytteenottovälillä ja valonlähteen kanssa 5 nm näytteenottovälillä. Sopiva näytteenottoväli on 29 nm ilman valonlähdettä ja 9 nm valonlähteen kanssa, minkä jälkeen  $\Delta E$ -virhe alkaa nousta voimakkaasti, tosin Munsell-sarjalle valonlähteen kanssa saadaan hyvä tulos edelleen 12 nm ja 14 nm näytteenottovälillä. Simpsonin säännöllä tulokset ovat selvästi huonompia kuin muilla menetelmillä. Fairmanin interpoloinnista ei edelleenkään juuri ole hyötyä.



Taulukko 5.11:  $\Delta E$ -virheiden maksimi valituilla näytteenottoväleillä.

| $\Delta E$ -virheiden maksimi                                  | Munsell-sarja ilman valonlähdettä |     |     |      | Munsell-sarja valonlähteen kanssa |     |     |      |      |
|--|-----------------------------------|-----|-----|------|-----------------------------------|-----|-----|------|------|
|  | 10                                | 20  | 29  | 39   | 5                                 | 9   | 10  | 12   | 14   |
| Näytteenottoväli (nm)  |                                   |     |     |      |                                   |     |     |      |      |
| Suoraan harvennetut värispektrit, kanava-arvojen tulojen summa | 1,0                               | 2,0 | 2,0 | 4,4  | 0,8                               | 1,8 | 3,3 | 1,3  | 1,7  |
| Suoraan harvennetut värispektrit, puolisuunnikassääntö         | 1,0                               | 2,0 | 2,0 | 4,2  | 0,8                               | 1,8 | 3,3 | 1,3  | 1,7  |
| Suoraan harvennetut värispektrit, Simpsonin sääntö             | 0,8                               | 2,8 | 5,6 | 16,5 | 1,0                               | 4,5 | 3,2 | 10,2 | 15,6 |
| Fairmanin interpolointi, kanava-arvojen tulojen summa          | 1,0                               | 2,1 | 1,8 | 5,3  | 0,8                               | 1,8 | 3,3 | 1,2  | 1,9  |
| Fairmanin interpolointi, puolisuunnikassääntö                  | 1,0                               | 2,1 | 1,8 | 5,3  | 0,8                               | 1,8 | 3,3 | 1,2  | 1,9  |
| Fairmanin interpolointi, Simpsonin sääntö                      | 1,0                               | 2,1 | 1,8 | 5,3  | 0,8                               | 1,8 | 3,3 | 1,2  | 1,9  |



Kuva 5.17:  $\Delta E$ -virheen maksimi eri näytteenottoväleillä Munsell-sarjalle ilman valonlähdettä (vasemmalla) ja valonlähteen kanssa (oikealla).

Valittuja optimaalisia näytteenottovälejä vastaavat puolisuunnikassäännöllä ja Simpsonin säännöllä lasketut suhteellisten värispektrien pinta-alaerojen maksimit ovat taulukossa 5.12.

Tulokset ovat pienempiä kuin värispektrisarjoille ilman herkkyyskäyriä (vrt. taulukko 5.6). Lisäksi taulukossa 5.13 on esitetty pinta-alaeron maksimin 0,01-rajaa vastaavat näytteenottovälit, mitkä ovat edelleen lähellä taajuustason ja  $\Delta E$ -virheen yhteydessä valittuja näytteenottovälejä.

*Taulukko 5.12: Suhteellisten värispektrien pinta-alaerot valituilla näytteenottoväleillä.*

|  | <b>Näytteenottoväli (nm)</b> | <b>Puolisuunnikas-säännöllä laskettu suhteellisten spektrien pinta-alaero (maksimi)</b> | <b>Simpsonin säännöllä laskettu suhteellisten spektrien pinta-alaero (maksimi)</b> |
|--|------------------------------|---|--|
| <b>Munsell-sarja ilman valonlähdettä</b> | 10                           | 0,002   | 0,001  |
|  | 29                           | 0,017   | 0,012  |
| <b>Munsell-sarja valonlähteen kanssa</b> | 5                            | 0,003   | 0,002  |
|  | 9                            | 0,010   | 0,008  |
|  | 12                           | 0,017   | 0,014  |
|  | 14                           | 0,023   | 0,013  |

*Taulukko 5.13: Suurin näytteenottoväli (nm), jonka (ja jota pienemmillä näytteenottoväleillä) suhteellisten värispektrien pinta-alaero on pienempi kuin 0,01.*

| <b>Suhteellisten värispektrien pinta-alaero &lt; 0,01</b> | <b>Munsell-sarja ilman valonlähdettä</b> | <b>Munsell-sarja valonlähteen kanssa</b> |
|---|--|--|
| <b>Puolisuunnikas-sääntö</b>                              | 23                                       | 8  |
| <b>Simpsonin sääntö</b>                                   | 25                                       | 9  |

### 5.7 Eri virhemitat ja metameria

Taulukossa 5.14 on esitetty kaikki virheet (lukuun ottamatta  $\Delta E$ -virhettä) molemmille sarjoille eri näytteenottoväleillä. MSE-virhe on kaikkiaan välillä  $10^{-6}$ ... $10^{-2}$ , joten sitä ei pienuutensa vuoksi ole tässä esitetty. Munsell-sarjalle ilman valonlähdettä virheet ovat vielä 40 nm kohdalla alhaisia. Absoluuttinen keskivirhe MAE pysyy kaikilla näytteenottoväleillä alle 0,01-ajan, kun taas signaalikohinasuhteet SNR ja PSNR säilyvät 30 dB yläpuolella. Myös maksimivirheet MAX ja keskimääräiset spektrietäisyydet MSD ovat alhaisia.

Munsell-sarjalle valonlähteen kanssa saadaan 5 nm kohdalla jokseenkin samat tulokset kuin 30 nm näytteenottovälillä ilman valonlähdettä. Nämä tulokset ovat hyviä, mutta 10 nm näytteenottoväli Munsell-sarjalle valonlähteen kanssa nostaa virhettä jo huomattavasti. MAE-vir-

heen 0,01-raja ylittyy, SNR-virhe on jo alle 20 dB ja PSNR-virhe alle 30 dB. Edelleen 20 nm, 30 nm ja 40 nm näytteenottoväleillä tulos on jo kelvoton. Maksimivirhe MAX kasvaa korkeaksi kuten myös absoluuttinen keskivirhe MAE. Signaalikohinasuhde SNR on jo alle 10 dB ja sen huippuarvo alle 20 dB.

*Taulukko 5.14 Virheitä eri näytteenottoväleillä.*

| <b>Munsell-sarja ilman valonlähdettä</b> |            |            |            |                 |                  |
|--|------------|------------|------------|-----------------|------------------|
| <b>Näytteenottoväli (nm)</b>             | <b>MAX</b> | <b>MAE</b> | <b>MSD</b> | <b>SNR (dB)</b> | <b>PSNR (dB)</b> |
| <b>5</b>                                 | 0,02       | 0,001      | 0,03       | 47,6            | 56,8             |
| <b>10</b>                                | 0,03       | 0,001      | 0,03       | 45,8            | 55,0             |
| <b>20</b>                                | 0,07       | 0,003      | 0,09       | 35,7            | 45,0             |
| <b>30</b>                                | 0,14       | 0,004      | 0,14       | 31,6            | 40,9             |
| <b>40</b>                                | 0,13       | 0,005      | 0,18       | 30,6            | 39,9             |
| <b>Munsell-sarja valonlähteen kanssa</b> |            |            |            |                 |                  |
| <b>Näytteenottoväli (nm)</b>             | <b>MAX</b> | <b>MAE</b> | <b>MSD</b> | <b>SNR (dB)</b> | <b>PSNR (dB)</b> |
| <b>5</b>                                 | 0,12       | 0,003      | 0,14       | 31,5            | 41,4             |
| <b>10</b>                                | 0,42       | 0,016      | 0,68       | 18,0            | 27,9             |
| <b>20</b>                                | 1,31       | 0,062      | 2,42       | 6,9             | 16,8             |
| <b>30</b>                                | 2,63       | 0,092      | 3,71       | 3,1             | 12,9             |
| <b>40</b>                                | 1,74       | 0,114      | 3,83       | 2,9             | 12,8             |

Valittujen näytteenottovälien virheitä on esitetty taulukossa 5.15. Absoluuttinen keskivirhe säilyy 0,01-rajan alapuolella alle 9 nm näytteenottovälillä Munsell-sarjalle valonlähteen kanssa. Näytteenottovälillä 9 nm maksimivirhe MAX ja absoluuttinen keskivirhe MAE nousevat jo kohtalaiseksi. Signaalikohinasuhde SNR on kuitenkin vielä yli 20 dB ja sen huippuarvo PSNR on 30 dB. Näytteenottoväleillä 12 nm ja 14 nm maksimivirheet MAX ovat jo suuria ja absoluuttiset keskivirheet MAE monikertaisia verrattuna 0,01-rajaan. Signaalikohinasuhde SNR laskee jo lähelle 10 dB ja vastaavasti sen huippuarvo PSNR lähelle 20 dB. Näin ollen 12 nm ja 14 nm eivät ole enää kelvollisia näytteenottovälejä, vaikka  $\Delta E$ -virhe näillä näytteenottoväleillä olikin pieni.

Taulukko 5.15: Valittujen näytteenottovälien virheitä.

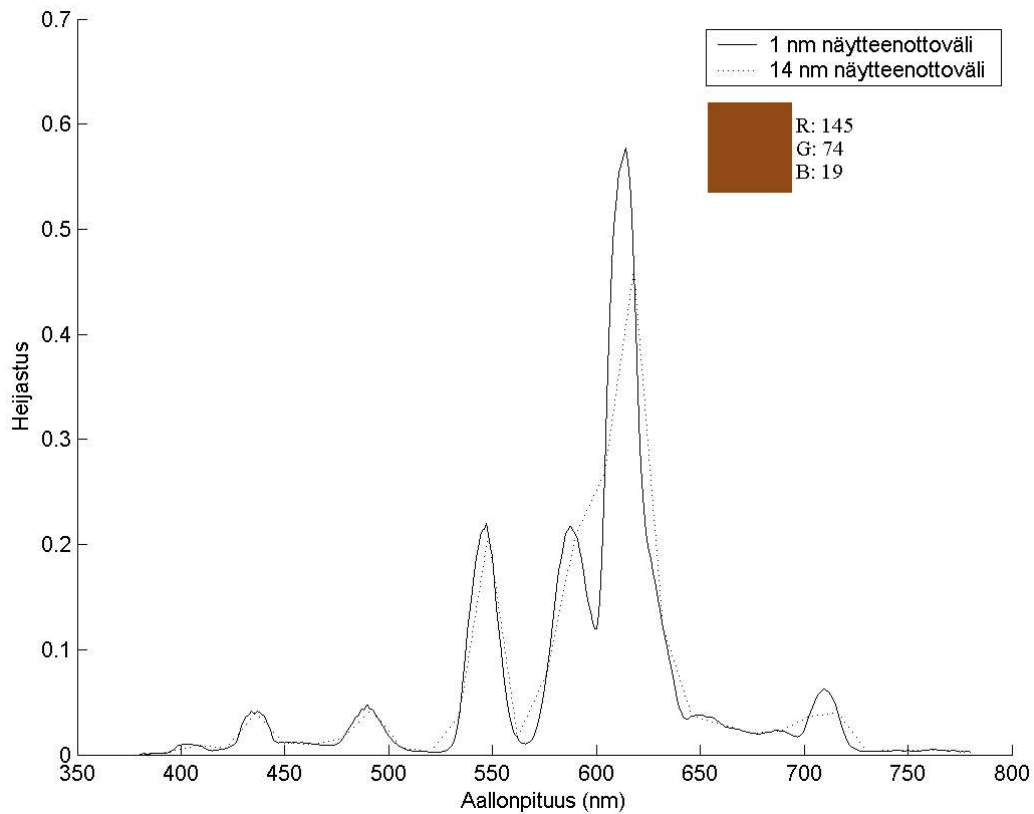
|  | <b>Näytteen-<br/>ottoväli<br/>(nm)</b> | <b>MAX</b> | <b>MAE</b> | <b>MSD</b> | <b>SNR<br/>(dB)</b> | <b>PSNR<br/>(dB)</b> |
|--|--|------------|------------|------------|---------------------|----------------------|
| <b>Munsell-sarja ilman<br/>valonlähdettä</b> | 10                                     | 0,03       | 0,001      | 0,03       | 45,8                | 55,0                 |
|  | 29                                     | 0,14       | 0,004      | 0,14       | 31,5                | 40,8                 |
|  | 39                                     | 0,13       | 0,005      | 0,17       | 30,8                | 40,1                 |
| <b>Munsell-sarja<br/>valonlähteen kanssa</b> | 5                                      | 0,12       | 0,003      | 0,14       | 31,5                | 41,4                 |
|  | 8                                      | 0,31       | 0,009      | 0,40       | 22,5                | 32,4                 |
|  | 9                                      | 0,44       | 0,012      | 0,52       | 20,2                | 30,1                 |
|  | 12                                     | 0,71       | 0,028      | 1,12       | 13,6                | 23,5                 |
|  | 14                                     | 0,73       | 0,035      | 1,41       | 11,6                | 21,4                 |

Herkkyyskäyrän kanssa sovitetuille värispektrisarjoille valittiin vastaavia näytteenottovälejä kuin sarjoille ilman herkkyyskäyrää. Näiden näytteenottovälien virheet on esitetty taulukossa 5.16. Taulukkoon on lisätty myös 39 nm väli Munsell-sarjalle ilman valonlähdettä sekä 8 nm väli sarjalle valonlähteen kanssa, jolloin näytteenottovälit ovat samat kuin taulukossa 5.15. Kaiken kaikkiaan virheet ovat pienempiä ja vastaavasti signaalikohinasuhteet hieman suurempia kuin sarjoille ilman herkkyyskäyrää. Edelleen 12 ja 14 nm näytteenottovälit antavat suurempia virheitä ja pienempiä signaalikohinasuhteita, aivan kuten sarjoille ilman herkkyyskäyrää.

Taulukko 5.16: Valittujen näytteenottovälien virheitä ihmisen silmän herkkyyskäyrälle sovitetuille värispektrisarjoille.

|  | <b>Näytteen-<br/>ottoväli<br/>(nm)</b> | <b>MAX</b> | <b>MAE</b> | <b>MSD</b> | <b>SNR<br/>(dB)</b> | <b>PSNR<br/>(dB)</b> |
|--|--|------------|------------|------------|---------------------|----------------------|
| <b>Munsell-sarja ilman<br/>valonlähdettä</b> | 10                                     | 0,02       | 0,0003     | 0,02       | 44,9                | 61,3                 |
|  | 29                                     | 0,07       | 0,002      | 0,07       | 30,2                | 46,3                 |
|  | 39                                     | 0,11       | 0,003      | 0,11       | 27,2                | 43,5                 |
| <b>Munsell-sarja<br/>valonlähteen kanssa</b> | 5                                      | 0,08       | 0,002      | 0,09       | 32,9                | 45,4                 |
|  | 8                                      | 0,19       | 0,005      | 0,25       | 24,1                | 36,7                 |
|  | 9                                      | 0,32       | 0,007      | 0,40       | 19,7                | 32,3                 |
|  | 12                                     | 0,49       | 0,015      | 0,76       | 14,2                | 26,8                 |
|  | 14                                     | 0,65       | 0,021      | 1,02       | 11,7                | 24,2                 |

Munsell-sarjan värispektreistä valonlähteen kanssa on helposti löydettävissä metamerisiä esimerkkejä. Metameriaan viittaavat taulukon 5.5 mukainen  $\Delta E$ -virheen pienuus sekä taulukkojen 5.6 ja 5.15 antamat suuret virheet 12 nm ja 14 nm näytteenottoväleillä. Yksi tällainen metameriaesimerkki on esitetty kuvassa 5.18 ja sen virheet 10 nm ja 14 nm näytteenottoväleiltä taulukossa 5.17. Vaikka 14 nm välillä virheet ovat suurempia ja signaalikohinasuhteet pienempiä kuin 10 nm välillä, laskee  $\Delta E$ -virhe todella pieneksi.



Kuva 5.18: Esimerkkispektri tuottaa saman sRGB-arvon 1 nm ja 14 nm näytteenottoväleillä.

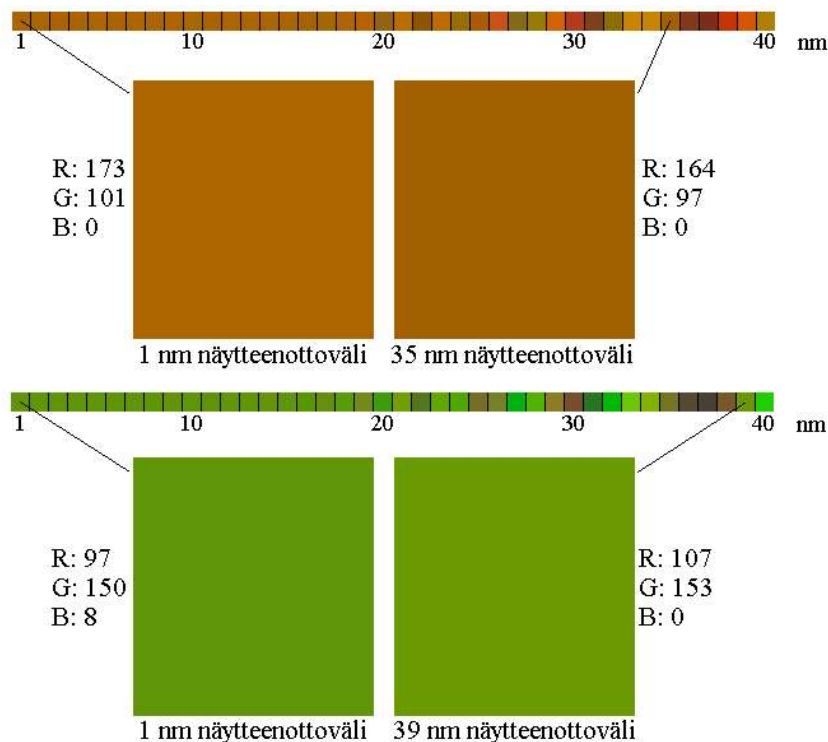
Taulukko 5.17: Esimerkkispektrin virheet 10 nm ja 14 nm näytteenottoväleillä.

| Näytteenottoväli | MAX  | MAE   | MSD  | SNR (dB) | PSNR (dB) | $\Delta E$ |
|------------------|------|-------|------|----------|-----------|------------|
| 10 nm            | 0,09 | 0,005 | 0,27 | 19,3     | 37,5      | 2,0        |
| 14 nm            | 0,16 | 0,015 | 0,68 | 11,2     | 29,3      | 0,1        |

Sarjan 1269 värispektreistä saadaan 25 eri spektrillä täsmälleen samat 8-bittiset sRGB-arvot 14 nm näytteenottovälillä kuin tarkalla 1 nm välilläkin. Samoin 11 eri värispektrillä tulee samat sRGB-arvot 1 nm ja 12 nm näytteenottoväleillä. Kaikkiaan saman sRGB-arvon omaavia spektrejä 10...40 nm näytteenottoväleiltä verrattuna alkuperäisen 1 nm näytteenottovälin spektrin sRGB-arvoon on 39 kpl. Suurin tällaisen spektrin näytteenottoväli on 18 nm. Täsmälleen

samoja reaalisia XYZ-arvoja ei kuitenkaan saada millään 10..40 nm näytteenottovälin värispektrillä alkuperäiseen 1 nm värispektriin nähden. Sen sijaan XYZ-arvojen pyöristys yhden desimaalin tarkkuuteen tuottaa saman XYZ-arvon kaikkiaan 30 spektrillä, joista 24 kpl oli 14 nm näytteenottoväliltä. Suurin tällaisen spektrin näytteenottoväli oli 15 nm.

Vastaavasti suuremmiltakin näytteenottoväleiltä on löydettävissä metameriaan viittaavia esimerkkejä. Kuvasta 5.12 nähdään  $\Delta E$ -virheen huomattava paikallinen lasku 35 nm ja 39 nm näytteenottoväleillä. Näillä näytteenottoväleillä sRGB-arvot eivät ole täsmälleen samoja millään spektrillä verrattuna 1 nm tarkkuuteen, mutta ne ovat lähellä toisiaan. Kuvassa 5.19 on sRGB-esitykset eri näytteenottoväleiltä siitä spektristä, joka antaa koko sarjan pienimmän  $\Delta E$ -virheen 35 nm näytteenottovälillä. Vastaavasti alempana on sen spektrin sRGB-esitykset, joka antaa sarjan pienimmän  $\Delta E$ -virheen 39 nm näytteenottovälillä. Näiden esimerkkispektrien sRGB-esitykset ovat muilla yli 20 nm näytteenottoväleillä selvästi erilaisia verrattuna tarkkaan 1 nm näytteenottoon.



Kuva 5.19: Metameriaan viittaavia esimerkkejä.

## 5.8 Taajuusrajoitettu värispektri

Luvussa 5.3 esitettyjä johonkin taajuuteen rajattuja värispektrejä voidaan mallintaa kaavan 3.10 mukaisesti. Suoraan valittuihin näytteenottoväleihin ja niitä vastaaviin taajuuksiin rajattujen värispektrien  $\Delta E$ -virheiden maksimit on esitetty taulukossa 5.18. Munsell-sarjalla ilman

valonlähdettä 29 nm näytteenottoa vastaavaan taajuuteen rajoitettu värispektri antaa pienemmän virheen kuin suoraan harvennettu. Kuitenkin 39 nm näytteenotolla taajuusrajoitetun värispektrin virhe on erityisen suuri. Munsell-sarjalla valonlähteen kanssa  $\Delta E$ -virheet ovat taajuusrajoitetulle värispektrille kaiken kaikkiaan hieman suuremmat, erityisesti 9 nm ja 12 nm näytteenottovälillä, joskin 14 nm kohdalla saadaan pienempi virhe.

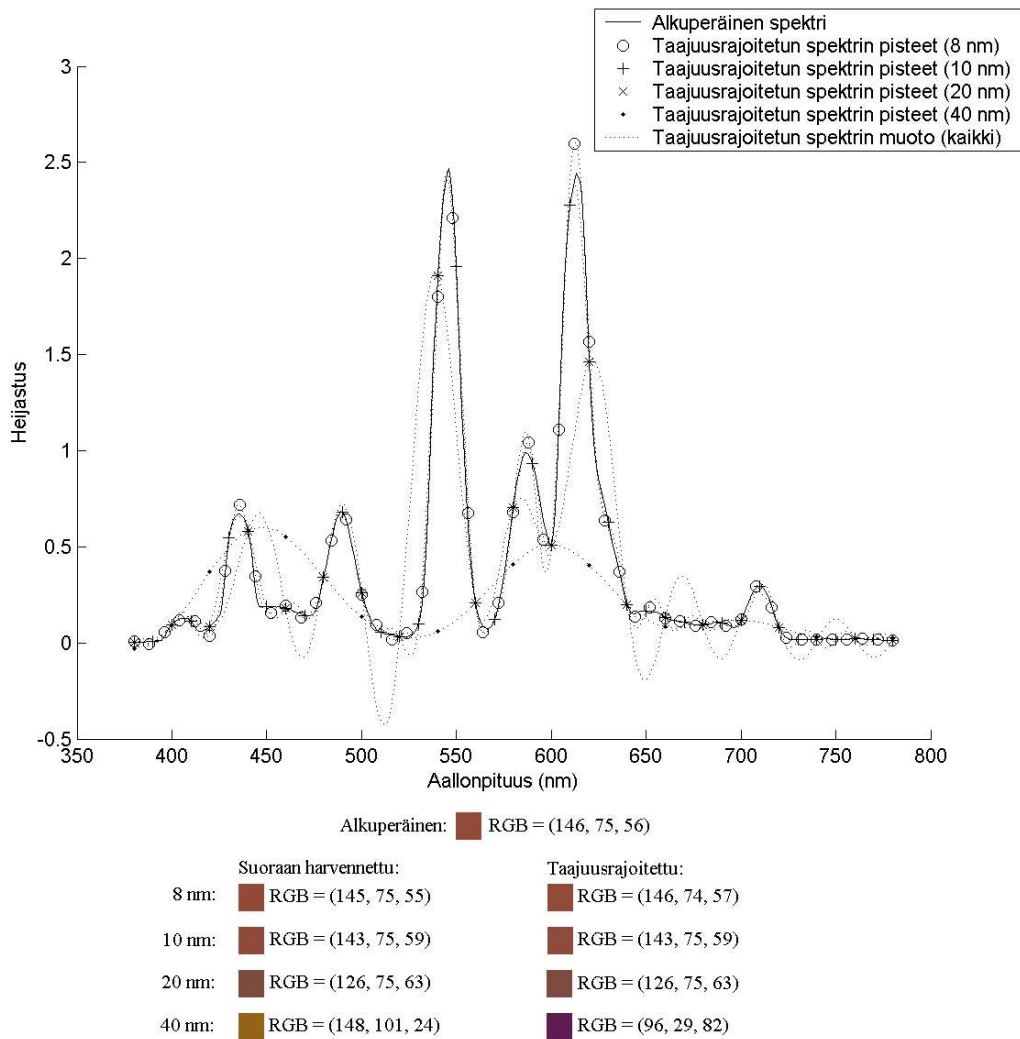
*Taulukko 5.18: Suoraan harvennettujen ja taajuusrajoitettujen värispektrien  $\Delta E$ -virheiden maksimit valituilla näytteenottoväleillä.*

| $\Delta E$ -virheiden maksimi            | Näytteenottoväli (nm) | Suoraan harvennetut värispektrit | Taajuusrajoitetut värispektrit |
|--|-----------------------|----------------------------------|--------------------------------|
| <b>Munsell-sarja ilman valonlähdettä</b> | 10                    | 1,2                              | 1,2                            |
|  | 29                    | 2,3                              | 1,9                            |
|  | 39                    | 3,7                              | 7,2                            |
| <b>Munsell-sarja valonlähteen kanssa</b> | 5                     | 1,0                              | 1,0                            |
|  | 8                     | 1,6                              | 1,9                            |
|  | 9                     | 1,5                              | 2,5                            |
|  | 12                    | 1,3                              | 4,0                            |
|  | 14                    | 2,2                              | 1,8                            |

Kuvassa 5.20 on valonlähteen omaavan Munsell-sarjan värispektrin taajuusrajoitettu malli eri rajataajuuksilla. Alkuperäinen värispektri on esitetty kiinteällä viivalla ja taajuusrajoitettujen värispektrien muodot katkoviivalla. Taajuusrajoitetut värispektrit ovat 10 nm, 20 nm, 40 nm ja valittua 8 nm näytteenottoväliä vastaavien taajuuksien rajaamia spektrejä. Eri taajuusrajoitetut värispektrit tallennetaan rajataajuutta vastaavan näytteenottovälin mukaan. Tallennettavat pisteet näissä värispektreissä on merkitty kuvaan plus-, risti-, piste- ja ympyrä-merkeillä. Lisäksi suoraan harvennettujen ja taajuusrajoitettujen spektrien vastaavat sRGB-esitykset on esitetty kuvassa näiltä aallonpituusväleiltä.

Kuvasta 5.20 nähdään, että vaikka värispektrin muoto eri rajataajuuksilla voi muuttuakin runsaasti, spektrin pisteet seuraavat hyvin alkuperäistä värispektriä. Eri rajataajuuksien (vastaava näytteenottoväli 8 nm, 10 nm ja 20 nm) pisteet osuvat lähes alkuperäisen värispektrin pisteille, jolloin vastaava sRGB-esitysikin on likipitäen sama kuin suoraan harvennetulla värispektrillä. Kuitenkin 40 nm näytteenottoväliä vastaava taajuus on jo niin matala, että tämän rajataajuuden omaavan värispektrin pisteet eivät enää osu alkuperäiselle spektrille, mistä johtuu sel-

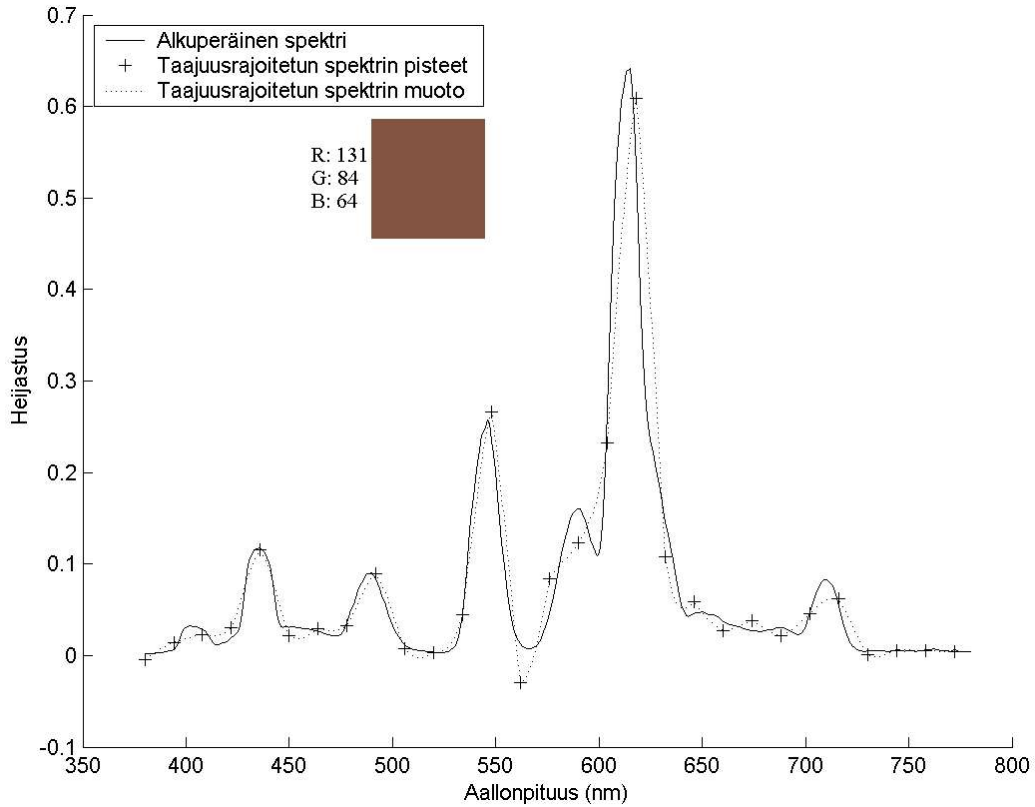
vä ero myös suoraan harvennetun ja taajuusrajoitteen värispektrin sRGB-esityksissä.



*Kuva 5.20: Värispektri eri rajataajuuksilla sekä suoraan harvennetun ja taajuusrajoitteen värispektrin sRGB-vertailu.*

Taajuusrajoitetuista spektreistä Munsell-sarjalle valonlähteen kanssa on helposti löydettävissä myös metameriaan viittaavia esimerkkejä. Sama 8-bittinen sRGB-arvo alkuperäiseen spektriin nähden löytyy 149 kpl 10...40 nm näytteenottoväliä vastaavilla taajuusrajoitetuilla spektreillä. Näistä 141 kpl ovat 14 nm näytteenottoväliä vastaavilta taajuuksilta, joista yksi on esitetty kuvassa 5.21 sekä sen virheet 10 nm ja 14 nm näytteenottoväleiltä taulukossa 5.19. Matalin metamerialan aiheuttava taajuus tietyllä spektrillä vastaa 16 nm näytteenottoa. XYZ-arvojen pyöristys yhden desimaalin tarkkuuteen tuottaa saman XYZ-arvon kaikkiaan 33 kpl spektrillä, joista 27 kpl oli 14 nm näytteenottoväliltä. Suurin tällaisen spektrin näytteenottoväli on 15 nm. Tästä huolimatta vain 3 kpl näistä ovat täsmälleen samoja spektrejä samalla näytteenottovälillä kuin suoraan harvennettujen spektrien tapauksessa.





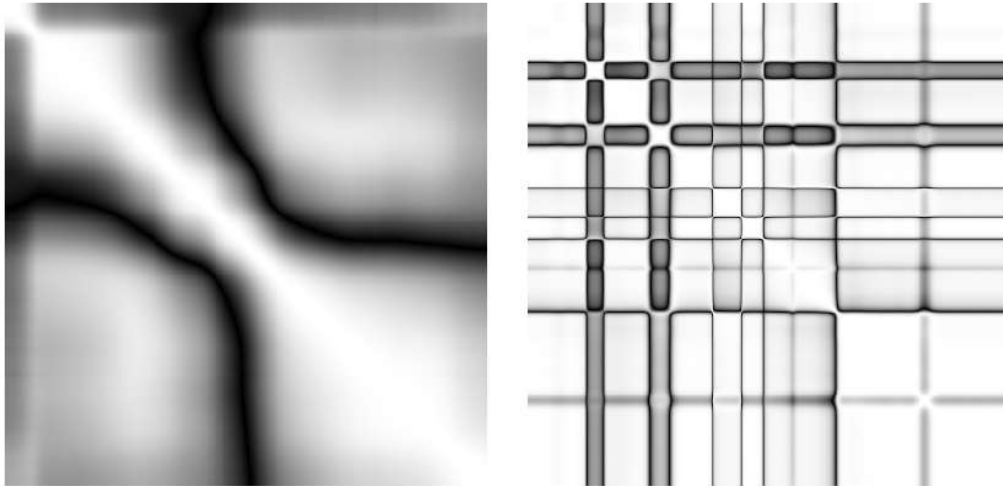
Kuva 5.21: Alkuperäinen 1 nm ja taajuusrajoitettu 14 nm näytteenottoa vastaava esimerkkispektri tuottaa saman sRGB-arvon.

Taulukko 5.19: Esimerkkispektrin virheet 10 nm ja 14 nm näytteenottoväleillä.

| Näytteenottoväli | MAX  | MAE   | MSD  | SNR (dB) | PSNR (dB) | $\Delta E$ |
|------------------|------|-------|------|----------|-----------|------------|
| 10 nm            | 0,11 | 0,008 | 0,34 | 18,1     | 35,5      | 2,2        |
| 14 nm            | 0,19 | 0,019 | 0,72 | 11,5     | 28,8      | 0,1        |

### 5.9 Korrelaatiomatriisimenetelmä ja pääkomponenttianalyysi

Munsell-sarjojen korrelaatiomatriisit  $R_p$ , jonka alkiot lasketaan kaavalla (3.12), on esitetty itseisarvoesityksenä kuvassa 5.22. Korrelointi on esitetty harmaasävyllä s.e. vaaleammat pisteet esittävät suurta ja tummat vähäistä korrelaatiota. Täysin valkoinen tarkoittaa täydellistä korrelaatiota (1 tai -1), kun taas taas täysin musta tarkoittaa, että korrelaatiota ei ole lainkaan (0). Kuvan 5.22 diagonaalien pisteet ovat täysin valkoisia, koska pisteet korreloivat itsensä kanssa. Kanava-arvot korreloivat voimakkaasti myös lähinaapuriensa kanssa, minkä jälkeen korrelointi laskee voimakkaasti. Tämä muodostaa matriisiin läpi valkoisen raidan. Molemmissa matriiseissa kiinnostavana ominaisuutena on tämän raidan leveys. Munsell-sarjalla ilman valonlähdettä korreloivien lähinaapurien määrä on värispektrien päissä huomattavasti suurempi kuin keskialueella, joskin aivan pienemmillä aallonpituuksilla syntyy poikkeus.

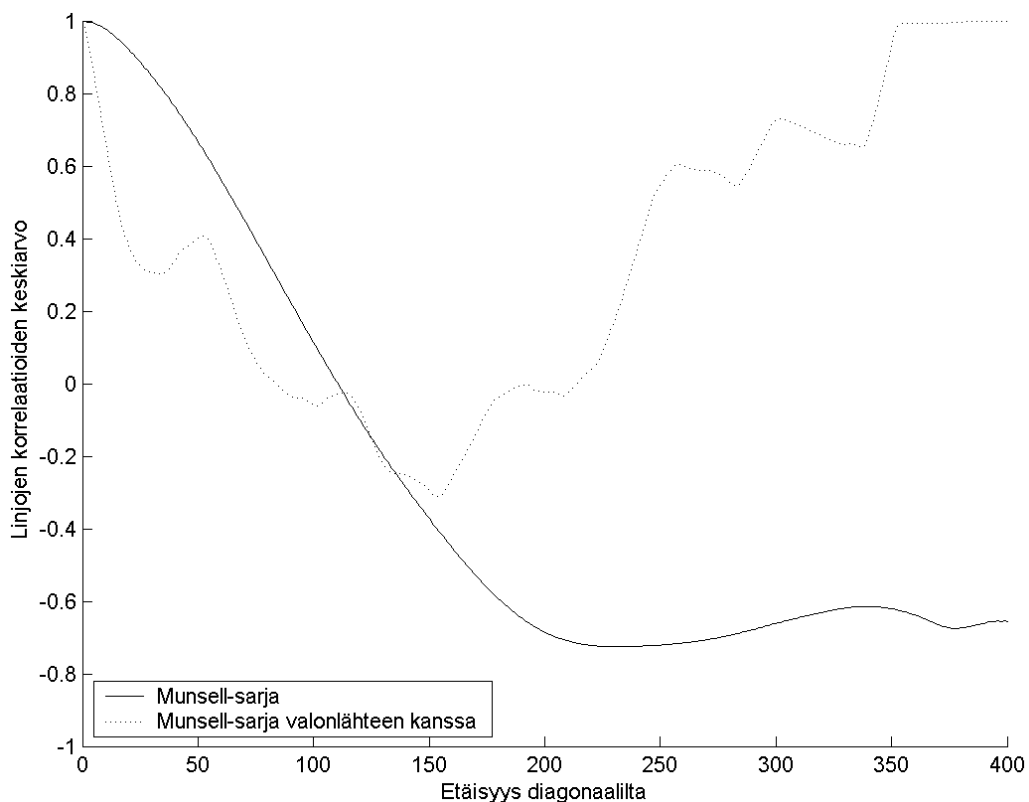


*Kuva 5.22: Korrelaatiomatriisi Munsell-sarjalle ilman valonlähdettä (vasemmalla) ja sarjalle valonlähteen kanssa (oikealla).*

Munsell-sarjalle ilman valonlähdettä korrelaatio pientä kuvasta 5.22 silmämääräisesti katsottuna n. 500...600 nm alueella verrattuna alueen ulkopuolisiin kanaviin (mustat raidat). Lisäksi sarjan korrelaatio on kohtalaista pienten ja suurten aallonpituuksien välillä, missä korrelaatiomatriisin arvot ovat negatiivisia (vasen alakulma ja oikea yläkulma). Syy näihin korrelaatioihin löytyy suoraan tarkastelemalla Munsell-sarjan värispektrejä. Kaiken kaikkiaan suurimmat vaihtelut värispektrisarjassa tapahtuvat juuri 500...600 nm alueella. Punaisilla ja keltaisilla värispektreillä kanava-arvot ovat pienillä aallonpituuksilla pieniä ja suurilla aallonpituuksilla suuria tehden nousun 500...600 nm kohdalle. Vastaavasti sinisillä värispektreillä kanava-arvot ovat pienillä aallonpituuksilla suuria ja suurilla aallonpituuksilla pieniä, jolloin saadaan kanava-arvojen lasku 500...600 nm alueelle. Tällaisia värispektrejä on sarjassa runsaasti, ja ne muodostavat negatiivisen korrelaation pienten ja suurien aallonpituuksien välille. Vihreät ja purppurat värispektrit taas muodostavat erillisen piikin 500...600 nm alueelle, ja tällä alueella näillä spektreillä korrelaatio muihin kanaviin on pientä. Sarjaan kuuluu vielä harmaita tai hyvin tummasävyisiä värispektrejä, missä korrelaatio on suurta läpi koko aallonpituusalueen.

Munsell-sarjalle valonlähteen kanssa korrelointi on hyvin suurta kaikkialla muualla paitsi valonlähteen piikkien kohdalla. Tämän kertoo kuvan 5.22 mustat raidat valonlähteen piikkien aallonpituuksilla. Spektrit ovatkin piikkejä ja niiden lähinaapureja lukuun ottamatta hyvin taseisia. Eri piikkien välillä ei myöskään juuri korrelaatiota esiinny, minkä kertoo mustien raitojen risteyskohtien tummuus diagonaalin ulkopuolella. Selvästi suurin eri piikkien välinen korrelaatio on valonlähteen kahdella ensimmäisellä piikillä. Lisäksi diagonaalin suuntaisen valkoisen raidan leveys on erittäin kapea.

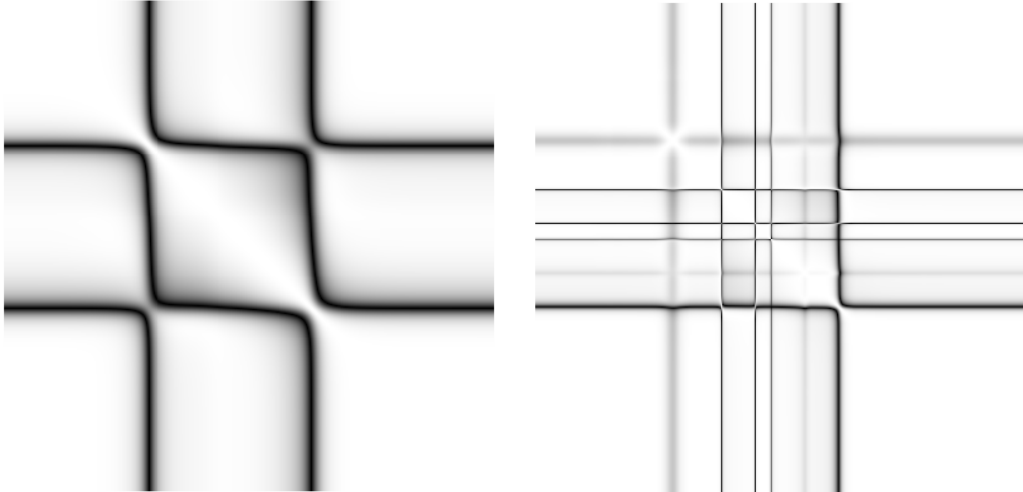
Kuvassa 5.23 on esitetty eri diagonaalien suuntaisten linjojen korrelaatioiden keskiarvot. Etäisyys diagonaalilta vastaa näytteenottoväliä. Sarjalle ilman valonlähdettä korrelaatio laskee pienillä näytteenottoväleillä loivemmin kuin valonlähteen kanssa. Valonlähteen kanssa korrelaatio jälleen nousee voimakkaasti suurilla näytteenottoväleillä, ja on aivan suurimmilla väleillä lähes täysin korreloitunutta. Tässä vaikuttavatkin keskenään vain aivan pienimmät ja suurimmat aallonpituudet, missä valonlähteeseen sovitettujen värispektrien kanava-arvot ovat lähes yhteneväisiä. Näin ollen tuleekin tutkia käyrän ensimmäistä laskua jonkin tietyn rajan alapuolelle. Suurimmat näytteenottovälit, missä (ja mitä pienemmällä näytteenottoväleillä) korrelaatio on yli 0,85, on Munsell-sarjalle ilman valonlähdettä 29 nm ja valonlähteen kanssa 5 nm. Saatu näytteenottoväli on Munsell-sarjalle ilman valonlähdettä sama kuin aikaisemmissa mitauksissa saatu väli, kun taas sarjalle valonlähteen kanssa väli on hieman pienempi. Korrelaatorajalla 0,80 vastaavat näytteenottovälit ovat 35 nm Munsell-sarjalle ilman valonlähdettä ja 6 nm valonlähteen kanssa. Näytteenottoväli ei juuri muutu Munsell-sarjalla valonlähteen kanssa, mutta sarjalla ilman valonlähdettä se suurenee selvästi.



Kuva 5.23: Diagonaalien suuntaisten linjojen korrelaatioiden keskiarvot.

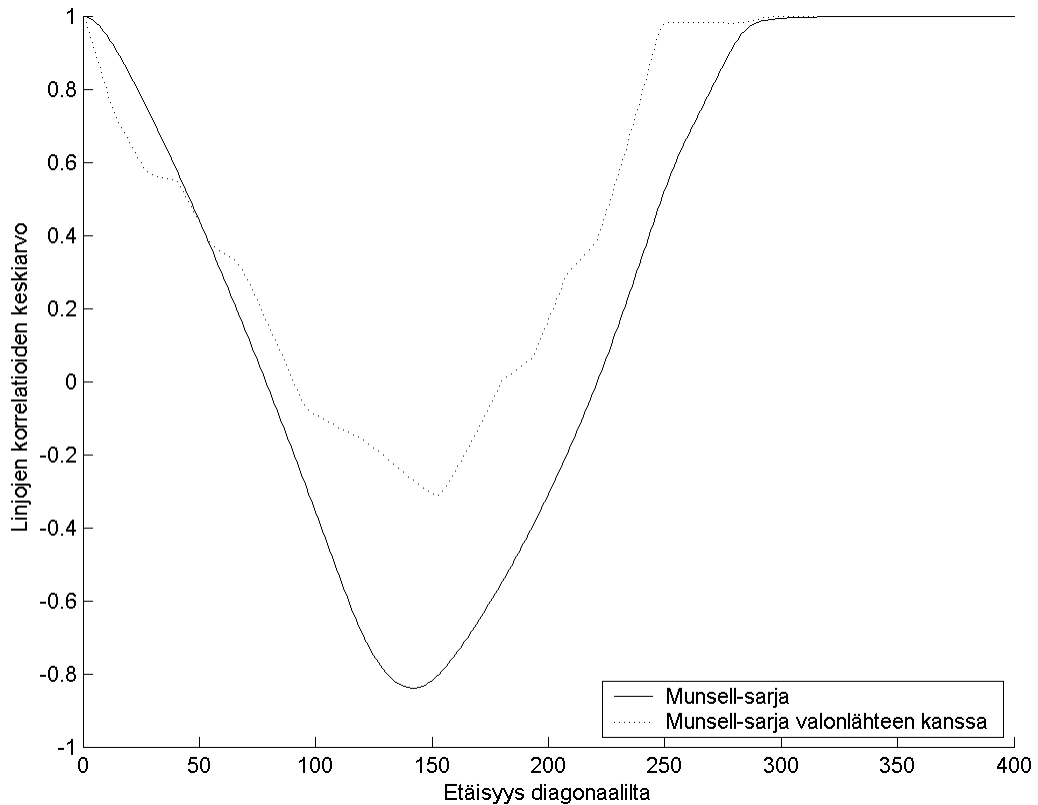
Korrelaatio kasvaa huomattavasti, kun värispektrit sovitetaan ihmisen silmän herkkyyssäilylle. Kuvassa 5.24 Munsell-sarjalla ilman valonlähdettä korrelaatio on suurta kaikkialla muualla paitsi kahdessa tietyssä kohdassa, jonka osoittavat kaksi raitaa. Nämä kohdat ovat ihmisen

herkkyyskäyrän jyrkimmillä kohdilla, missä sen derivaatta on suurin mahdollinen. Suurimmat muutokset sovitetuissa värispektreissä tapahtuvat juuri näillä aallonpituuksilla. Munsell-sarjalle valonlähteen kanssa ei juuri muuta muutosta tapahdu, kuin että korrelaatio kasvaa kaikkialla. Ensimmäinen kuvassa 5.22 esiintynyt tumma raita on hävinnyt, koska herkkyyskäyrä painaa ensimmäisen piikin lähelle nollaa. Muutenkin herkkyyskäyrä on hieman tasoittanut värispektrejä, jolloin muutkaan raidat eivät enää näy niin selvästi.



*Kuva 5.24: Korrelaatiomatriisi ihmisen silmän herkkyyskäyrälle sovitetulle Munsell-sarjalle ilman valonlähdettä (vasemmalla) ja valonlähteen kanssa (oikealla).*

Kuvassa 5.25 on linjojen suuntaisten korrelaatioiden keskiarvot ihmisen herkkyyskäyrille sovitetuille spektreille. Suurimmat näytteenottovälit korreloivat jälleen keskenään, koska herkkyyskäyrä laskee spektrien päät lähelle nollaa. Korrelaation 0,85-raja toteutuu 19 nm näytteenottovälillä Munsell-sarjalle ilman valonlähdettä ja 7 nm välillä valonlähteen kanssa. Lisäksi 0,8-rajalle vastaavat näytteenottovälit ovat 23 nm ilman valonlähdettä ja 10 nm valonlähteen kanssa. Saadut näytteenottovälit Munsell-sarjalle ilman valonlähdettä ovat hieman pienempiä ja sarjalle valonlähteen kanssa samantapaisia verrattuna aikaisemmissa mittauksissa saatuihin väleihin. Kaiken kaikkiaan sopivaa yksittäistä korrelaatorajaa on kuitenkin vaikea etsiä, koska sarjalle ilman herkkyyskäyrää sopivin raja taajuustason ja virheanalyysin tuloksiin nähden olisi 0,85 ilman valonlähdettä ja 0,70 valonlähteen kanssa. Vastaavat rajat herkkyyskäyrälle sovitetuilla sarjoilla on 0,73 ilman valonlähdettä ja 0,82 valonlähteen kanssa.



Kuva 5.25: Diagonaalien suuntaisten linjojen korrelaatioiden keskiarvot ihmisen silmän herkkyyssäyriille sovitetuille Munsell-sarjoille.

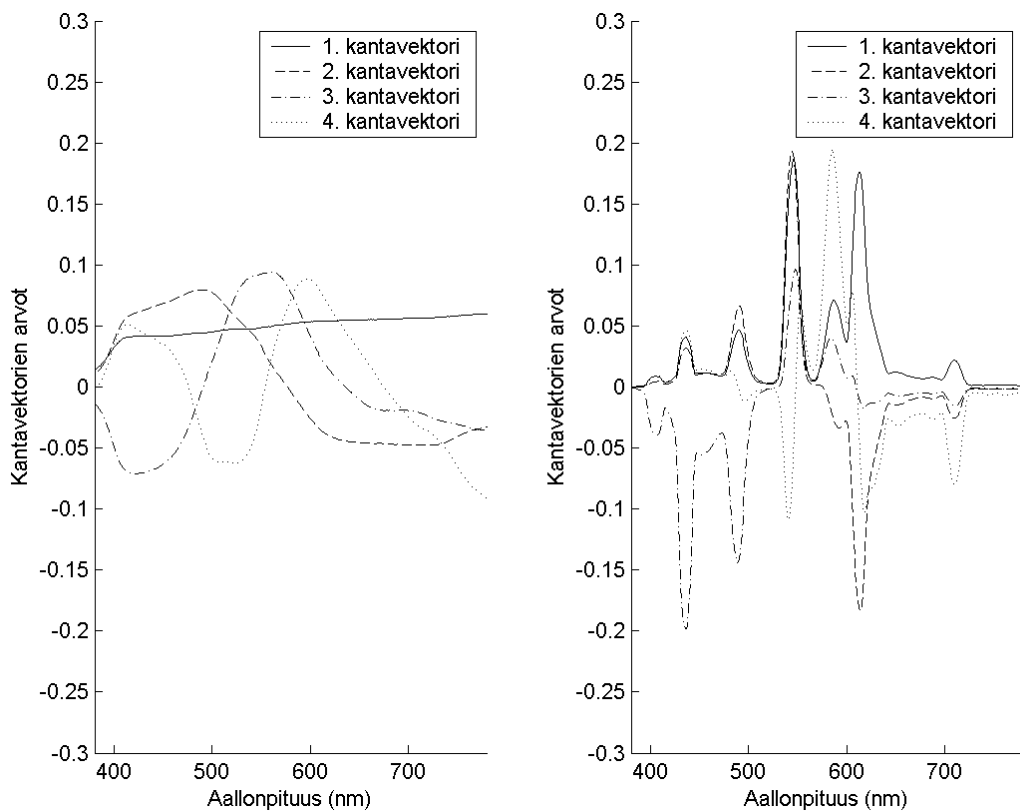
Taulukossa 5.20 on pääkomponenttianalyysillä laskettujen kantavektorien vaikutus tiedon säilyvyyteen. Munsell-sarjalla ilman valonlähdettä päästään yli 99,9%-rajan 7 kantavektorilla, kun taas sarjalla valonlähteen kanssa riittää 4 kantavektoria. Taulukossa 5.21 on kompressoitujen sarjan rekonstruktion  $\Delta E$ -virhe alkuperäiseen värispektriin nähden 1 nm näytteenottovälillä. Munsell-sarjan värispektreille ilman valonlähdettä riittää 7 kantavektoria, kun taas valonlähteen kanssa riittää 5..6 kantavektoria. Sarjalle valonlähteen kanssa virheet ovat huomattavasti pienempiä johtuen valonlähteen aiheuttamasta värispektrin samankaltaisuudesta, jolloin kantavektorit esittävät spektrin paremmin. Kuvassa 5.26 on molempien sarjojen 4 ensimmäistä kantavektoria. Värispektrisarjalle valonlähteen kanssa 1. kantavektori on hyvin lähellä käytettyä valonlähdettä.

Taulukko 5.20: Kantavektorien vaikutus tiedon säilyvyyteen.

| Kantavektorien määrä              | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     |
|-----------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Munsell-sarja                     | 92,8% | 97,7% | 99,3% | 99,6% | 99,8% | 99,8% | 99,9% |
| Munsell-sarja valonlähteen kanssa | 95,4% | 99,0% | 99,8% | 99,9% | 99,9% | 99,9% | 99,9% |

Taulukko 5.21: Pääkomponenttianalyysillä kompressoitujen värispektrien rekonstruktioiden  $\Delta E$ -virheet alkuperäisiin värispektreihin nähden 1 nm näytteenottovälillä.

| $\Delta E$ -virhe, 1 nm näytteenottoväli | Munsell-sarja ilman valonlähdettä |                             | Munsell-sarja valonlähteen kanssa |                             |
|--|-----------------------------------|-----------------------------|-----------------------------------|-----------------------------|
|  | $\Delta E$ -virheen keskiarvo     | $\Delta E$ -virheen maksimi | $\Delta E$ -virheen keskiarvo     | $\Delta E$ -virheen maksimi |
| 1  | 23,6                              | 71,6                        | 20,5                              | 54,8                        |
| 2  | 17,1                              | 115,4                       | 12,2                              | 54,8                        |
| 3  | 4,8                               | 64,1                        | 1,4                               | 14,3                        |
| 4  | 1,7                               | 10,1                        | 1,2                               | 12,2                        |
| 5  | 1,5                               | 11,3                        | 0,5                               | 6,9                         |
| 6  | 1,0                               | 12,2                        | 0,3                               | 3,1                         |
| 7  | 0,5                               | 3,8                         | 0,3                               | 2,8                         |
| 8  | 0,4                               | 4,0                         | 0,3                               | 2,5                         |
| 9  | 0,3                               | 3,5                         | 0,2                               | 1,7                         |
| 10                                       | 0,2                               | 2,3                         | 0,1                               | 1,3                         |



Kuva 5.26: Neljä ensimmäistä kantavektoria Munsell-sarjalle ilman valonlähdettä (vasemmalla) ja sarjalle valonlähteen kanssa (oikealla).

Taulukossa 5.22 on esitetty kompressoitujen värispektrien virhe alkuperäisiin 1 nm näytteenottoväleillä mitattuihin spektreihin nähden. Spektrisarjat on kompressoitu pääkomponenttianalyysillä 7 kantavektorilla. Virhe alkaa nousta Munsell-sarjalle ilman valonlähdettä 40 nm kohdalla, kun taas valonlähteen kanssa se nousee selvästi jo 10 nm kohdalla. Näitä rajoja pienemmillä näytteenottoväleillä virheet ovat keskenään lähes samoja.

*Taulukko 5.22: Eri näytteenottovälien ja 7 kantavektorin rekonstruktioiden  $\Delta E$ -virheet alkuperäisiin 1 nm tarkkuudella mitattuihin värispektreihin nähden.*

| <b><math>\Delta E</math>-virhe,<br/>7 kantavektoria</b> | <b>Munsell-sarja ilman<br/>valonlähdettä</b>       |  | <b>Munsell-sarja<br/>valonlähteen kanssa</b>       |  |
|---|--|--|--|--|
|   | <b><math>\Delta E</math>-virheen<br/>keskiarvo</b> | <b><math>\Delta E</math>-virheen<br/>maksimi</b> | <b><math>\Delta E</math>-virheen<br/>keskiarvo</b> | <b><math>\Delta E</math>-virheen<br/>maksimi</b> |
| <b>1</b>  | 0,5  | 3,8  | 0,3  | 2,8  |
| <b>2</b>  | 0,5  | 3,7  | 0,3  | 2,7  |
| <b>5</b>  | 0,5  | 3,9  | 0,3  | 2,9  |
| <b>10</b>   | 0,5  | 4,0  | 2,9  | 3,3  |
| <b>20</b>   | 0,5  | 3,9  | 13,8   | 22,0   |
| <b>40</b>   | 1,2  | 7,9  | 47,8   | 76,2   |

Taulukossa 5.23 on Munsell-sarjalle ilman valonlähdettä eri näytteenottoväleille harvennettujen ja eri määrällä kantavektoreita kompressoitujen värispektrien rekonstruktioiden signaalikohinasuhteiden huippuarvoja alkuperäiseen 1 nm tarkkuudella mitattuun värispektriin nähden. Taulukossa 5.24 ovat vastaavat arvot Munsell-sarjalle valonlähteen kanssa. Munsell-sarjalle ilman valonlähdettä PSNR kasvaa kantavektorien kasvaessa kaikilla näytteenottoväleillä. PSNR ylittää 40 dB rajan jo 7 kantavektorilla 1...10 nm näytteenottovälillä, ja vielä 20 nm näytteenottovälillä tämä ehto toteutuu 8 kantavektorilla. Sen sijaan valonlähteen kanssa PSNR-mitan kasvu pysähtyy 10...40 nm näytteenottoväleillä jo 3 kantavektoriin, jolloin suhde jää näillä näytteenottoväleillä pieneksi kantavektoreiden määrästä riippumatta. Pienemmillä 1...5 nm näytteenottoväleillä PSNR ylittää 40 dB rajan jopa 4...5 kantavektorilla. Kuvassa 5.27 on vielä esimerkkinä yksi alkuperäinen sekä vastaava 6 kantavektorin rekonstruoitu spektri 1 nm näytteenotolla.

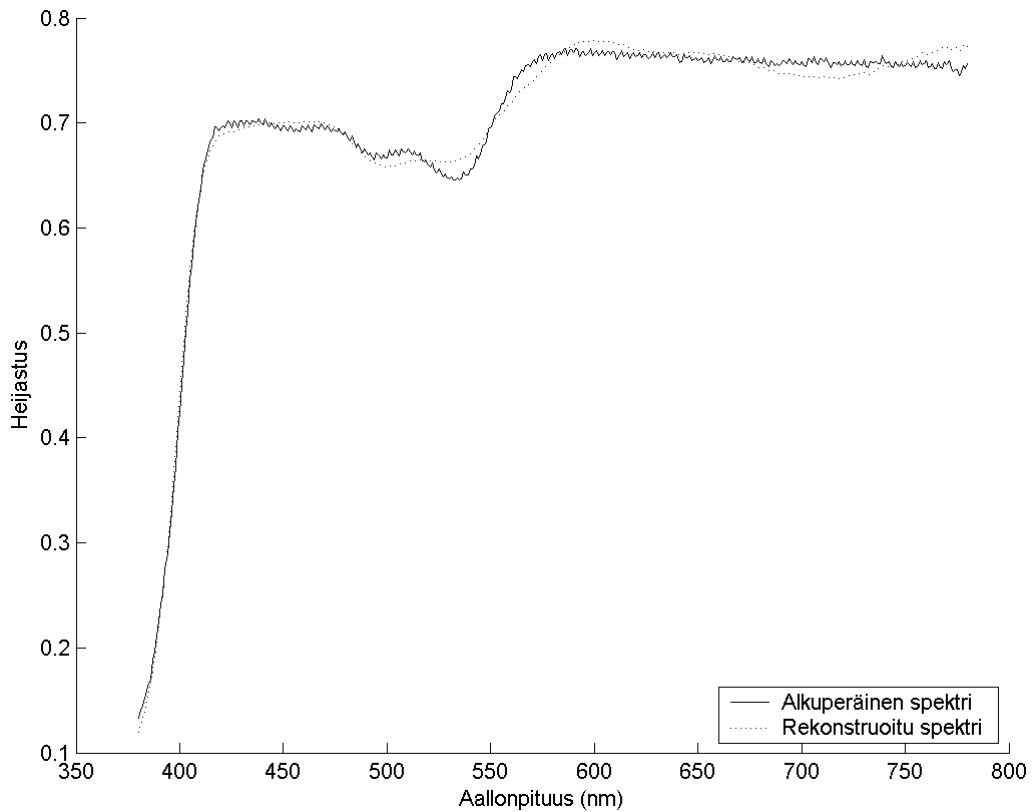
*Taulukko 5.23: Signaalikohinasuhteen huippuarvo eri näytteenottoväleillä ja kantavektorien määrällä Munsell-sarjalle ilman valonlähdettä.*

| PSNR (dB)                               | Näytteenottoväli (nm) |      |      |      |      |      |
|---|-----------------------|------|------|------|------|------|
|   | 1                     | 2    | 5    | 10   | 20   | 40   |
| <b>Kanta-<br/>vektoreiden<br/>määrä</b> |                       |      |      |      |      |      |
| <b>1</b>                                | 20,7                  | 20,7 | 20,7 | 20,7 | 20,7 | 20,7 |
| <b>2</b>                                | 25,6                  | 25,6 | 25,6 | 25,6 | 25,6 | 25,5 |
| <b>3</b>                                | 31,3                  | 31,3 | 31,3 | 31,3 | 31,1 | 31,0 |
| <b>4</b>                                | 34,3                  | 34,3 | 34,3 | 34,3 | 34,0 | 33,7 |
| <b>5</b>                                | 36,6                  | 36,6 | 36,6 | 36,6 | 36,1 | 35,5 |
| <b>6</b>                                | 38,7                  | 38,7 | 38,6 | 38,6 | 37,8 | 36,6 |
| <b>7</b>                                | 41,1                  | 41,1 | 41,1 | 41,0 | 39,7 | 37,9 |
| <b>8</b>                                | 43,9                  | 43,8 | 43,8 | 43,7 | 41,6 | 39,1 |
| <b>9</b>                                | 45,7                  | 45,7 | 45,7 | 45,5 | 42,6 | 39,5 |
| <b>10</b>                               | 48,1                  | 48,0 | 48,0 | 47,7 | 43,5 | 39,8 |

*Taulukko 5.24: Signaalikohinasuhteen huippuarvo eri näytteenottoväleillä ja kantavektorien määrällä Munsell-sarjalle valonlähteen kanssa.*

| PSNR (dB)                               | Näytteenottoväli (nm) |      |      |      |      |      |
|---|-----------------------|------|------|------|------|------|
|   | 1                     | 2    | 5    | 10   | 20   | 40   |
| <b>Kanta-<br/>vektoreiden<br/>määrä</b> |                       |      |      |      |      |      |
| <b>1</b>                                | 23,3                  | 23,3 | 23,2 | 22,1 | 16,0 | 12,6 |
| <b>2</b>                                | 29,9                  | 29,9 | 29,6 | 25,8 | 16,6 | 12,8 |
| <b>3</b>                                | 38,4                  | 38,4 | 36,7 | 27,5 | 16,8 | 12,8 |
| <b>4</b>                                | 41,3                  | 41,3 | 38,4 | 27,7 | 16,8 | 12,8 |
| <b>5</b>                                | 45,8                  | 45,6 | 40,1 | 27,8 | 16,8 | 12,8 |
| <b>6</b>                                | 49,0                  | 49,0 | 40,8 | 27,9 | 16,8 | 12,8 |
| <b>7</b>                                | 51,8                  | 51,7 | 41,1 | 27,9 | 16,8 | 12,8 |
| <b>8</b>                                | 53,4                  | 53,3 | 41,2 | 27,9 | 16,8 | 12,8 |
| <b>9</b>                                | 55,1                  | 54,9 | 41,3 | 27,9 | 16,8 | 12,8 |
| <b>10</b>                               | 56,8                  | 56,6 | 41,3 | 27,9 | 16,8 | 12,8 |

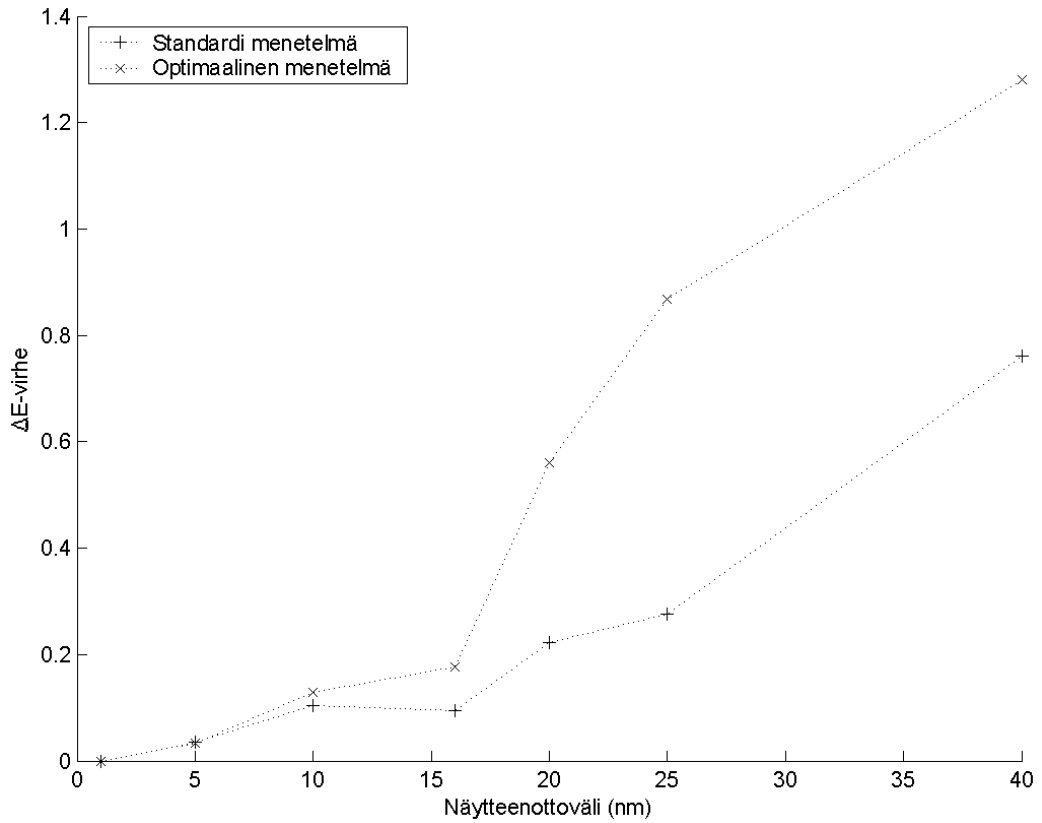




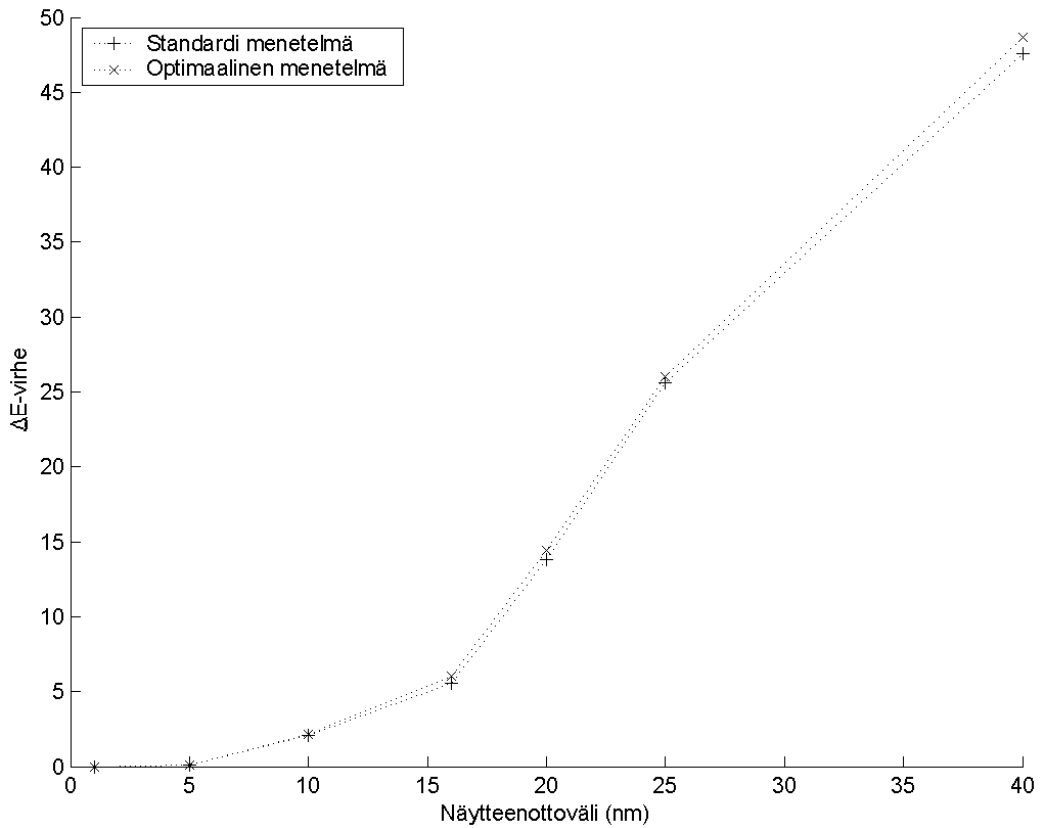
Kuva 5.27: Alkuperäinen värispektri ja 6 kantavektorin rekonstruktio.

### 5.10 Uusi menetelmä CIE-värisovitusfunktioiden laskemiseksi

Kuvissa 5.28 ja 5.29 on Munsell-sarjalle ilman valonlähdettä ja valonlähteen kanssa  $\Delta E$ -virheiden mediaanit standardilla ja *Li et al.* [20] esittelemällä uudella menetelmällä laskettuna. Koska uudessa menetelmässä näytteenottovälin tulee jakaa värispektrin aallonpituusalue tasan, on virheet laskettu 1 nm, 2 nm, 5 nm, 10 nm, 16 nm, 20 nm, 25 nm ja 40 nm näytteenottoväleiltä, koska nämä jakavat 380...780 nm alueen tasan. Kaiken kaikkiaan virhe uudella menetelmällä on suurempi verrattuna standardiin menetelmään. Ilman valonlähdettä virhe alkaa kasvaa suuremmaksi jo 5 nm jälkeen ja valonlähteen kanssa 10 nm jälkeen. Tulee huomioida, että kuvassa 5.29 on laaja  $\Delta E$ -akseli, jolloin virhekäyrät näyttävät olevan lähellä toisiaan.

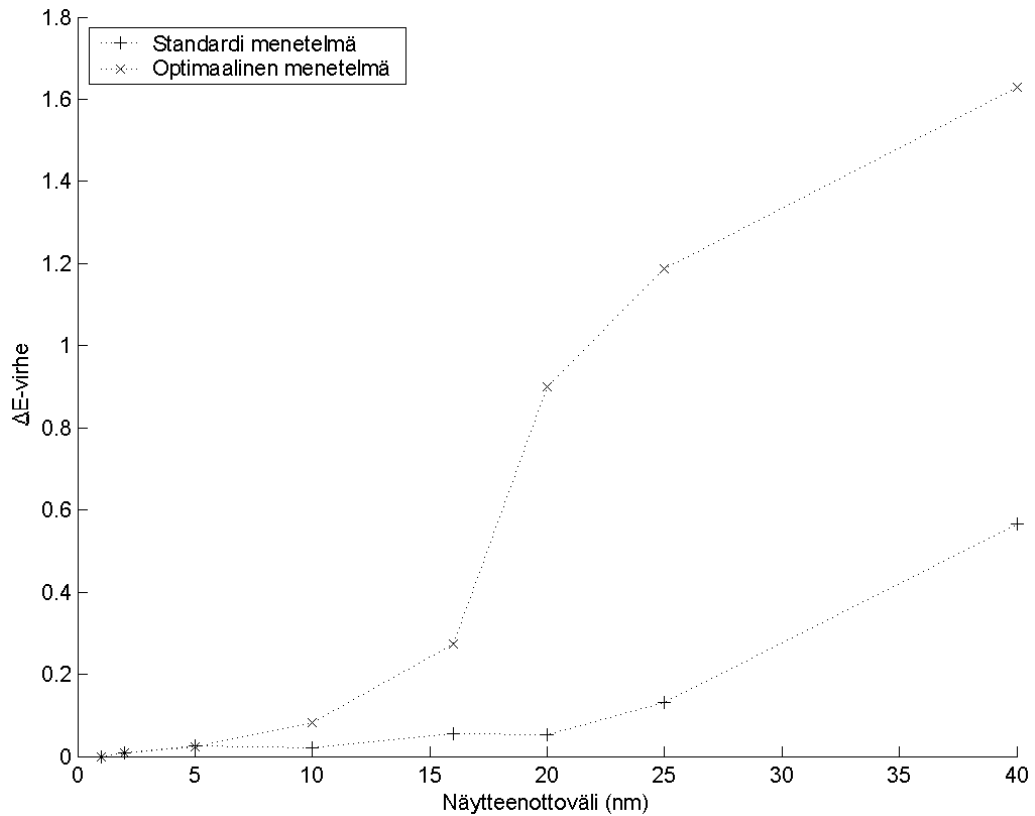


Kuva 5.28:  $\Delta E$ -virheen mediaanit eri näytteenottoväleillä Munsell-sarjalle ilman valonlähdettä standardilla ja uudella menetelmällä laskettuna.

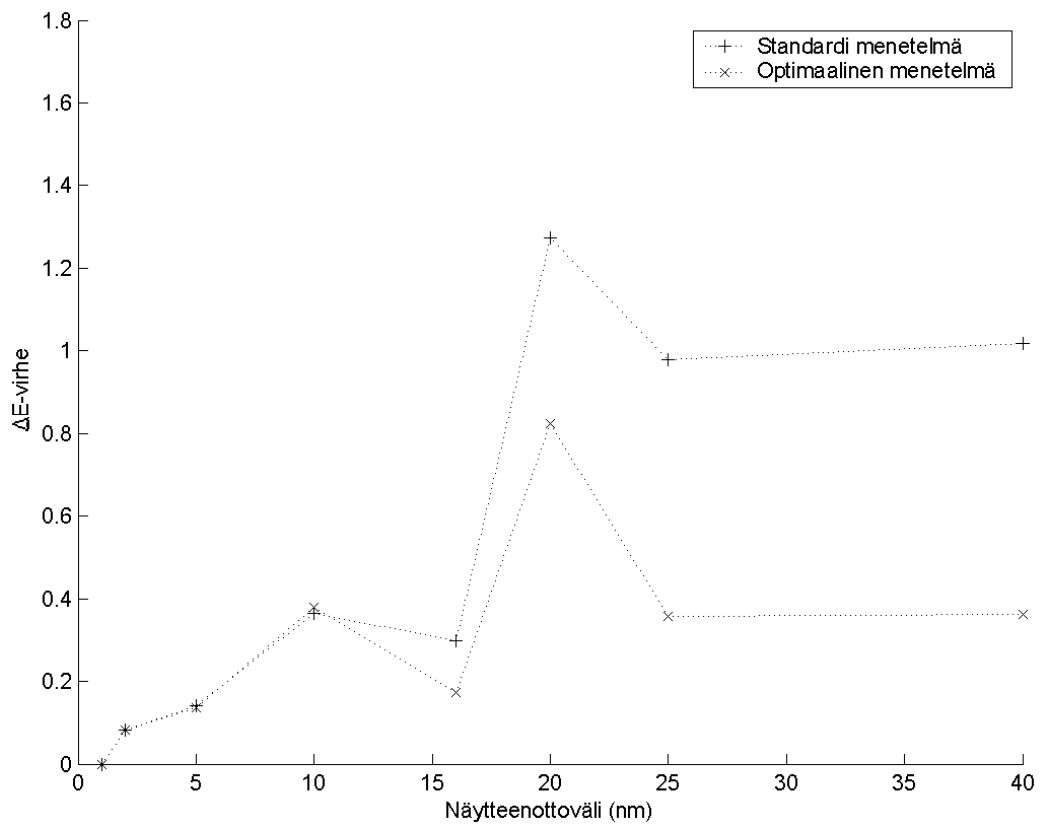


Kuva 5.29:  $\Delta E$ -virheen mediaanit eri näytteenottoväleillä Munsell-sarjalle valonlähteen kanssa standardilla ja uudella menetelmällä laskettuna.

Kuvassa 5.30 on uuden menetelmän kannalta yksi huono esimerkki, jossa virhe on suurempi kuin standardimenetelmässä. Vastaavasti kuvassa 5.31 uuden menetelmän kannalta hyvä, joskin harvinaisempi, esimerkki. Molemmat esimerkit on otettu Munsell-sarjasta ilman valonlähdettä. Mediaanivirhe kuitenkin osoittaa, että virheen suuruus asettuu sarjan useimmilla värispektreillä standardin menetelmän eduksi. Tämä loppujen lopuksi kyseenalaistaa uuden menetelmän yleisen toimivuuden ja hyödyllisyyden.



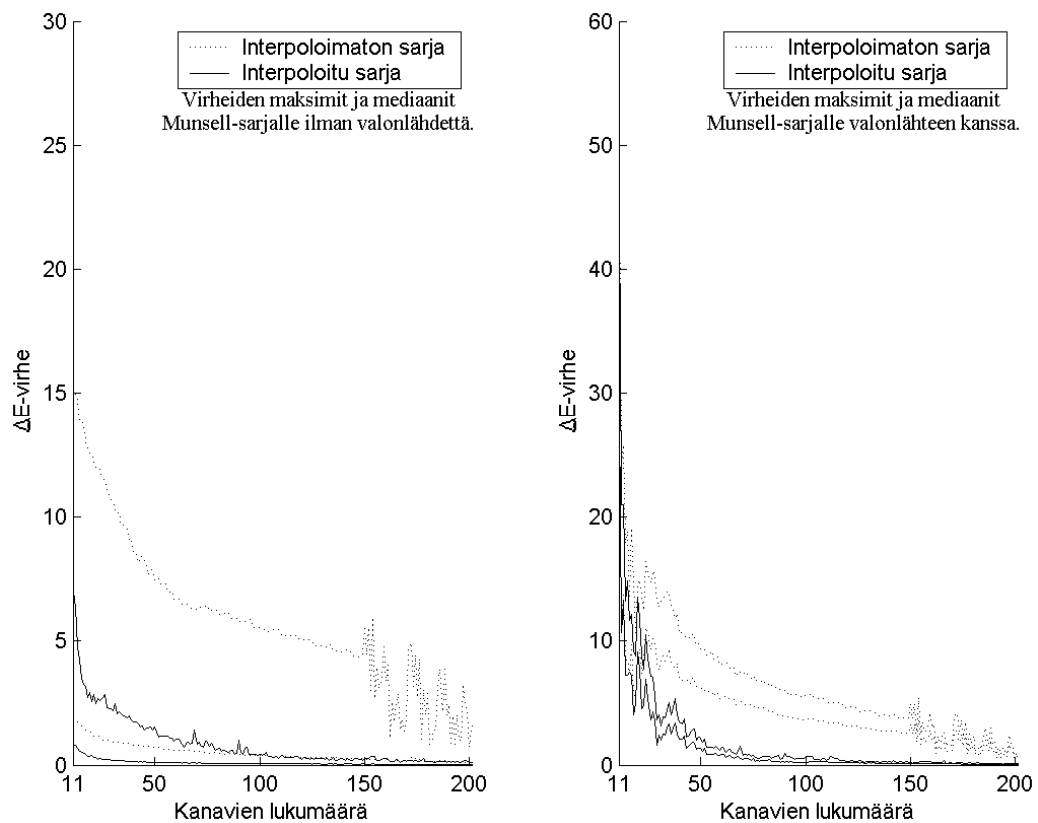
*Kuva 5.30: Huono esimerkki uuden menetelmän kannalta.*



*Kuva 5.31: Hyvä esimerkki uuden menetelmän kannalta.*

## 5.11 Epätasavälinen näytteenotto

Epätasaväliselle näytteenotolle käytetään mittana kanavien lukumäärää. Jotta tavallisia virhekaavoja voidaan käyttää, tulee epätasavälinen värispektri interpoloida tasaväliseksi 1 nm tarkkuuteen, jotta vertailu voidaan tehdä. Esimerkiksi  $\Delta E$ -virhettä ei ole suunniteltu epätasaväliselle näytteenotolle. Kuvassa 5.32 on puolisuunnikassäännön avulla laskettujen  $\Delta E$ -virheiden maksimit ja mediaanit eri näytteenotoilla interpoloimattomille ja Fairmanin interpoloinnilla interpoloiduille Munsell-sarjoille, kun näytteenoton painofunktiona on käytetty opponenttiväriteoriaan perustuvaa *opponenttikäyrää*. Kuvasta nähdään, että interpolointi laskee  $\Delta E$ -virheen maksimia ja mediaania selvästi. Epätasavälisessä näytteenotossa tulee erityisesti huomioida, että painofunktion avulla vain muodostetaan epätasavälinen näytteenotto värispektreille. Värispektrejä ei soviteta haluttuun painofunktioon kertomalla värispektrien ja painofunktion arvoja keskenään, kuten sovitus valonlähteeseen tai ihmisen herkkyysskäyrään tehdään.



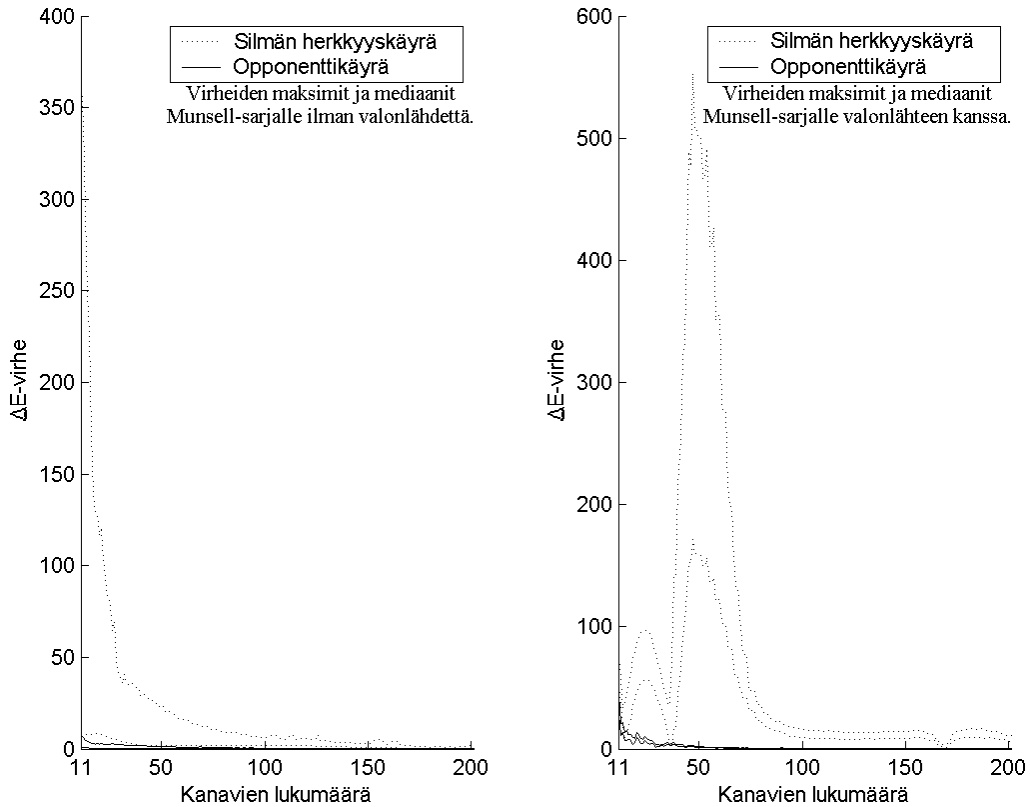
Kuva 5.32: Epätasavälinen näytteenotto verrattuna interpolaatioon.

Kuvassa 5.33 on Munsell-sarjojen  $\Delta E$ -virheiden maksimit ja mediaanit eri näytteenotoille, kun ihmisen silmän herkkyysskäyrä ja opponenttikäyrä on näytteenoton painofunktiona. Opponenttikäyrällä saadaan huomattavasti pienempi virhe. Huomionarvoista on, että nyt ihmisen silmän herkkyysskäyrällä  $\Delta E$ -virhe nousee jopa teoreettisen maksimin yläpuolelle, jolloin virhe ei ole realistinen. Teoriassa  $\Delta E$ -virhe voi olla  $L^*a^*b^*$ -koordinaatiston akselien raja-arvojen

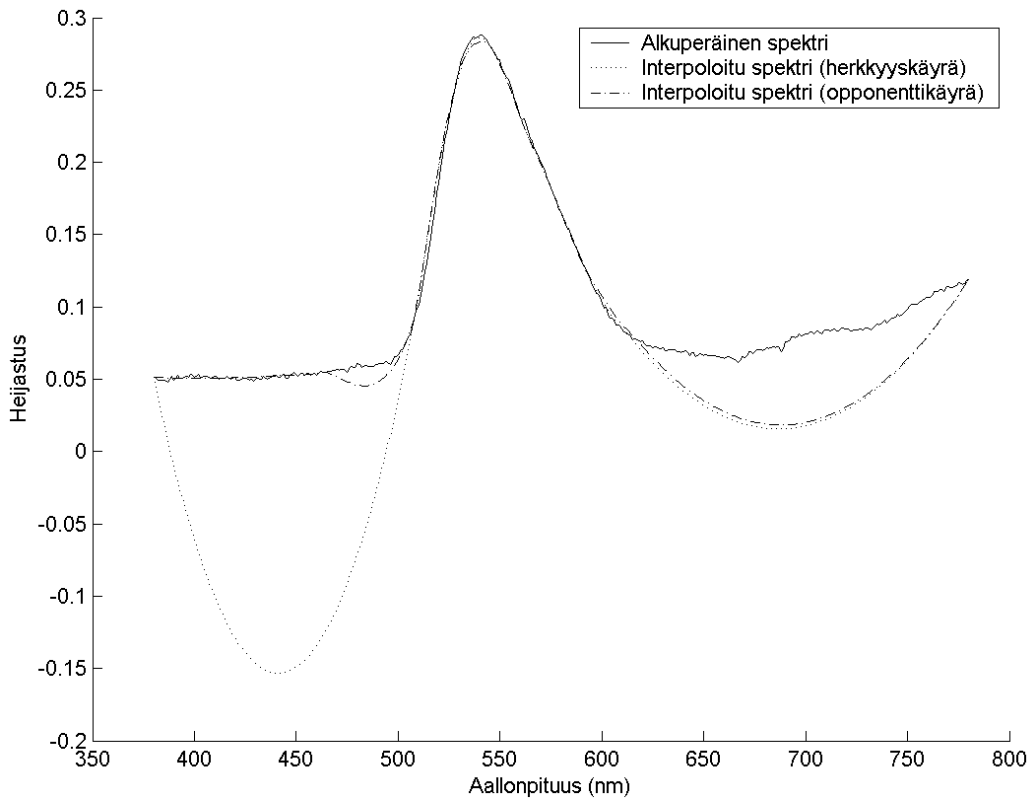
perusteella enintään

$$\begin{aligned} \Delta E_{max} &= \sqrt{\Delta L_{max}^{*2} + \Delta a_{max}^{*2} + \Delta b_{max}^{*2}} \\ &= \sqrt{(100-0)^2 + (60-(-60))^2 + (60-(-60))^2} \approx 197. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Suuri virhe johtuu Fairmanin interpoloinnista kuvan 5.34 mukaisesti. Ihmisen silmän herkkyyssäilyä näytteenoton painofunktiona asettaa hyvin suuren näytteenottovälin värispektrin päihin. Näin ollen jotkut interpoloidut pisteet osuvat negatiiviselle puolelle, mikä nostaa virhettä jopa yli teoreettisen maksimin.

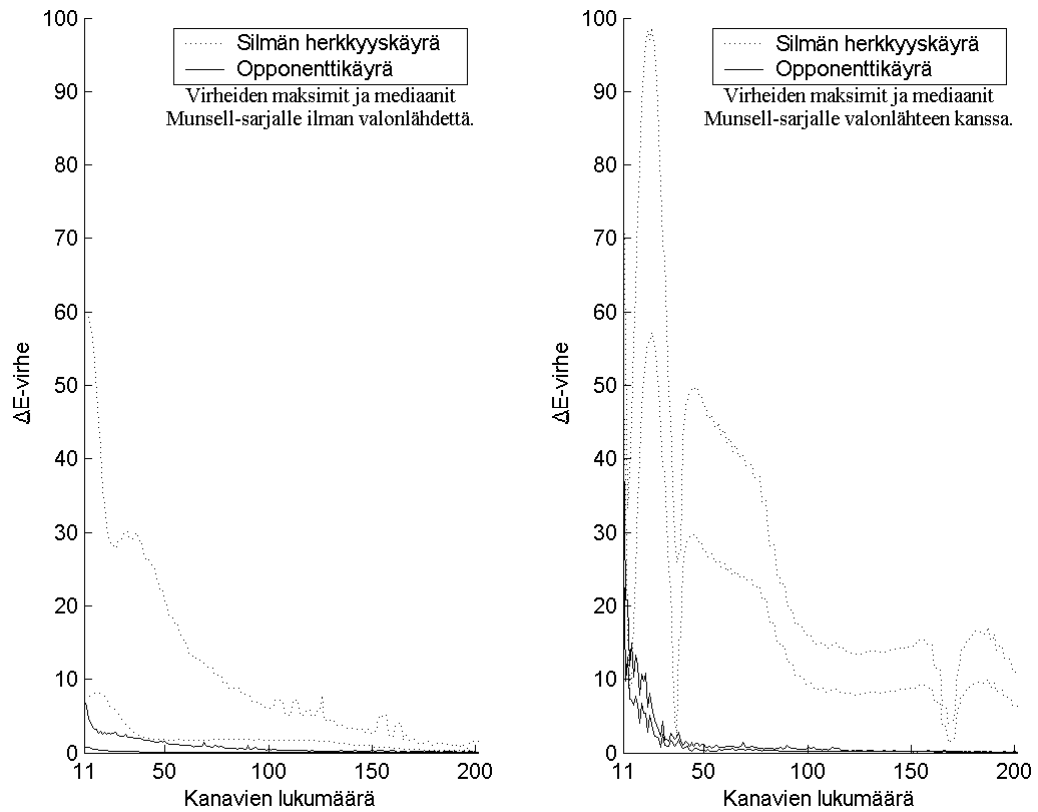


*Kuva 5.33: Ihmisen silmän herkkyyssäilyä verrattuna opponenttikäyryään näytteenoton painofunktiona.*

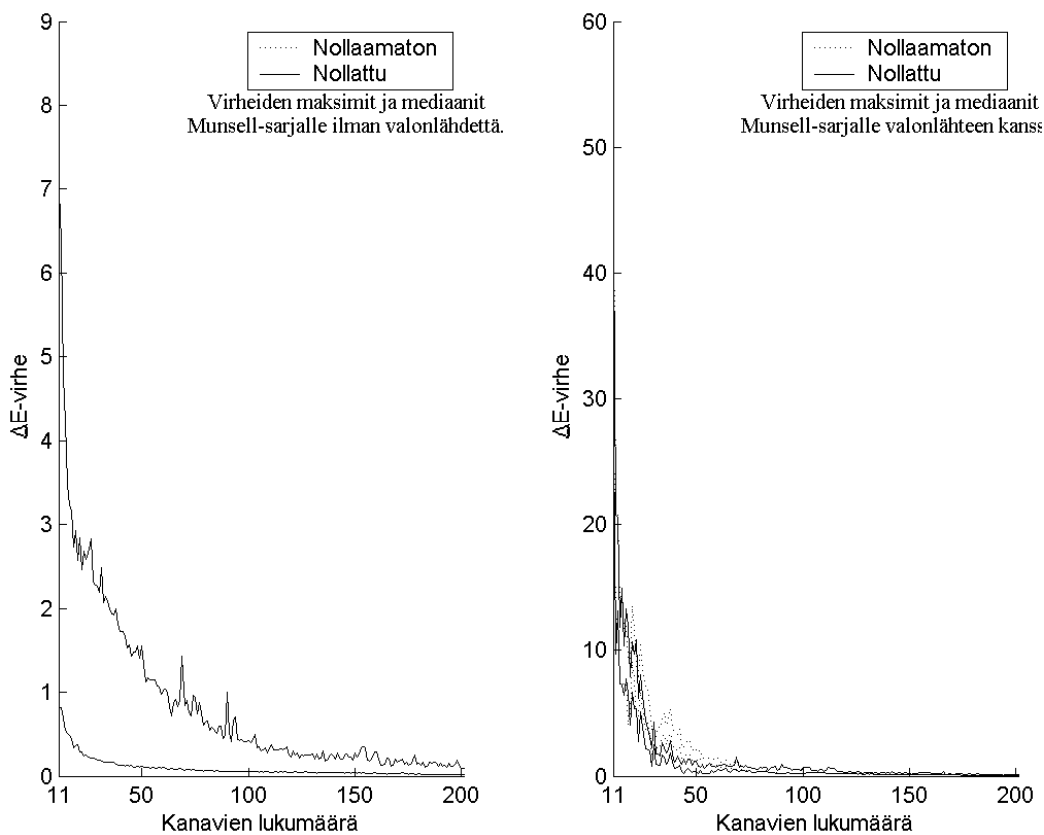


*Kuva 5.34: Alkuperäiset sekä 11 kanavan interpoloidut värispektrit herkkyyskäyrällä ja opponenttikäyrällä lasketuilla näytteenotoilla.*

Kun interpoloidut negatiiviset arvot nollataan, saadaan huomattavasti pienemmät ja realistisemmat  $\Delta E$ -virheet (kuva 5.35) ihmisen silmän herkkyyskäyrälle. Sen sijaan käytettäessä opponenttikäyrää painofunktiona negatiivisten arvojen nollaus ei juuri tee muutosta. Kuvassa 5.36 on esitetty  $\Delta E$ -virheiden maksimit ja mediaanit opponenttikäyrän eri näytteenotoilla interpoloiduille Munsell-sarjoille, missä negatiivisia arvoja ei ole nollattu sekä sarjoille, missä nollaus on tehty. Virhe pienenee hieman Munsell-sarjalle valonlähteen kanssa, missä taas sarjalle ilman valonlähdettä ei muutosta tapahdu.



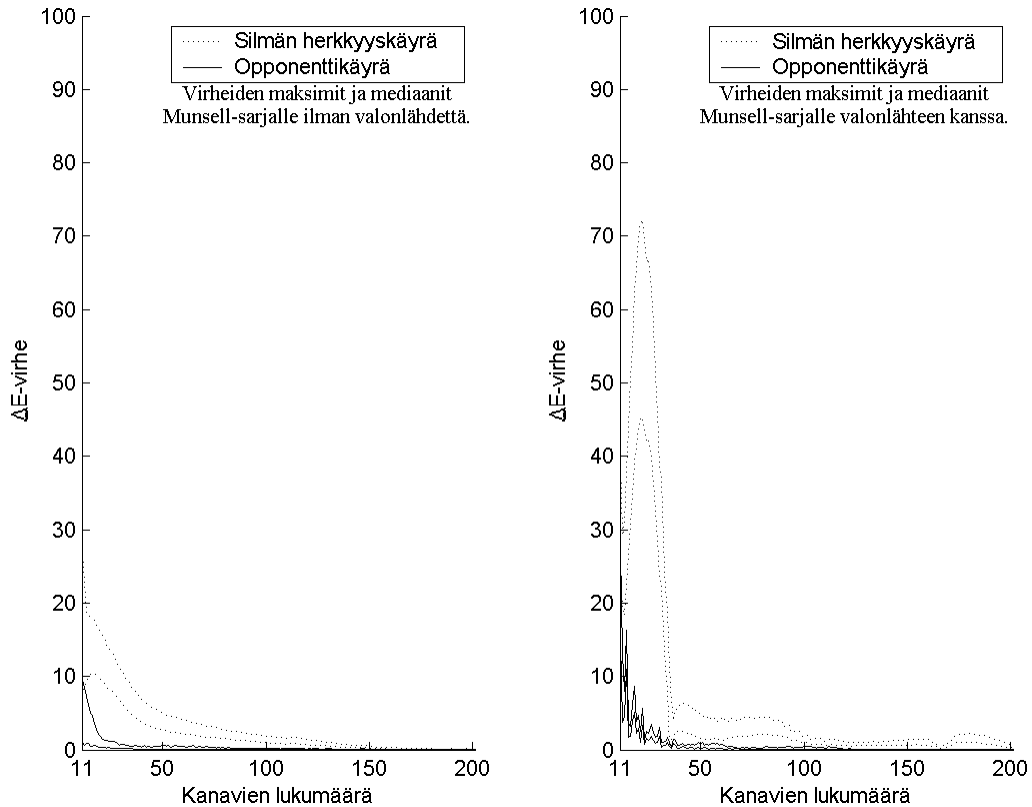
Kuva 5.35: Ihmisen silmän herkkyyssäily verrattuna opponenttikäyrään painofunktiona, missä interpoloitujen värispektrien negatiiviset arvot on nollattu.



Kuva 5.36: Nollauksen vaikutus käytettäessä opponenttikäyrää painofunktiona. Nollatun ja nollaamattoman sarjan virhekäyrät ovat vasemmalla päällekkäin.

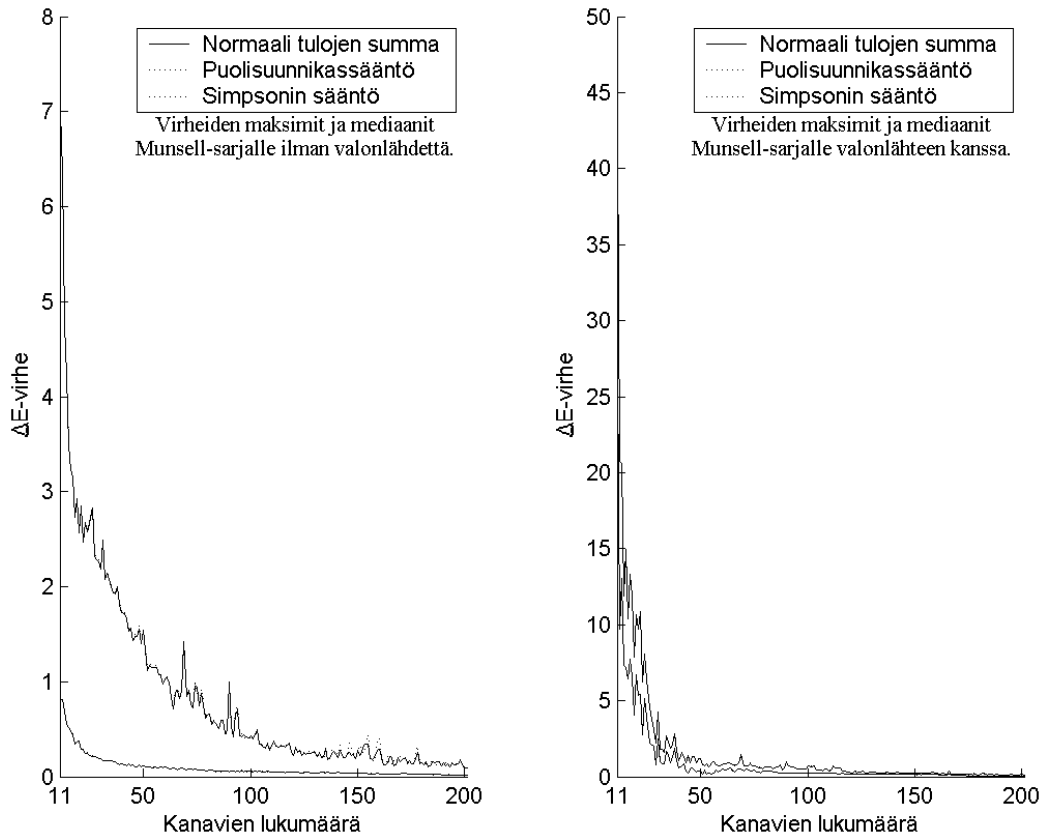


Kuvassa 5.37 on esitetty ihmisen silmän herkkyyssäyrylle sovitettujen Munsell-sarjojen  $\Delta E$ -virheiden maksimit ja mediaanit, kun näytteenoton painofunktiona on käytetty ihmisen silmän herkkyyssäyryä ja opponenttikäyryä. Värispektrit on interpoloitu Fairmanin interpoloinnilla 1 nm tarkkuuteen ja negatiiviset arvot on nollattu ennen laskentaa. Kaiken kaikkiaan  $\Delta E$ -virhe on huomattavasti pienempi herkkyyssäyryän sovituksen ansiosta. Ihmisen silmän herkkyyssäyry ei edelleenkään ole kelvollinen näytteenoton painofunktio, koska herkkyyssäyryän päissä on runsaasti lähellä nollia olevia arvoja (kuva 5.14). Näin ollen värispektrin päihin jää lähes aina liian suuri näytteenottoväli riippumatta kanavien lukumäärästä.



*Kuva 5.37: Ihmisen silmän herkkyyssäyry verrattuna opponenttikäyryän näytteenoton painofunktiona herkkyyssäyrylle sovitetuille Munsell-sarjoille, missä interpoloitujen värispektriin negatiiviset arvot on nollattu.*

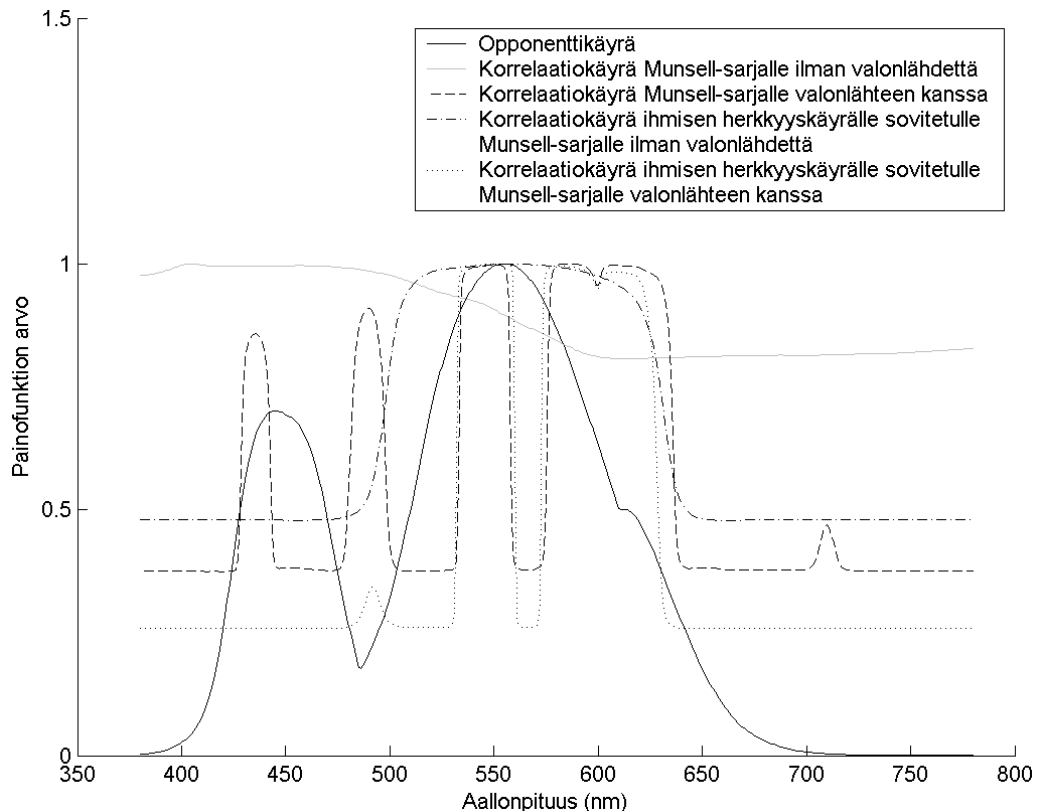
Kuvassa 5.38 on  $\Delta E$ -virhe vielä laskettu normaalilla tulojen summalla, puolisuunnikassään-  
nöllä ja Simpsonin säännöllä interpoloiduille ja nollatuille Munsell-sarjoille. Interpoloinnin  
ansiosta kanavien välit ovat kapeita, jolloin käytetyllä integrointimenetelmällä ei ole merkitys-  
tä. Kaikkiaan paras yhdistelmä edellä esitetyistä koostuu seuraavista toimenpiteistä: Oppo-  
nenttikäyrä näytteenoton painofunktiona, Fairmanin interpolointi, negatiivisten arvojen nol-  
laus sekä normaali tulojen summa (helpoin ja nopein laskea).



*Kuva 5.38: Eri integrointimenetelmien vaikutus  $\Delta E$ -virheen laskentaan.*

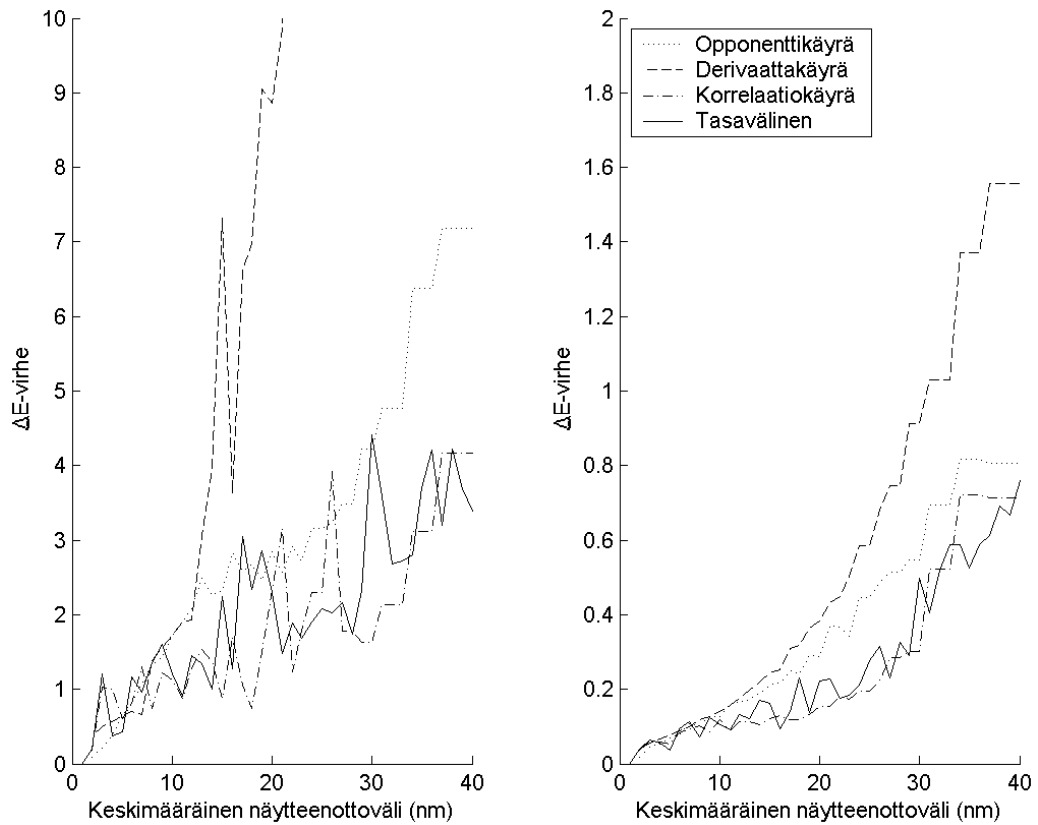
*Käyrät ovat molemmilla sarjoilla likipitään päällekkäin.*

Tarkastellaan keskenään opponenttiväriteoriaan, derivaattaan ja korrelaatioon perustuvia käyriä näytteenoton painofunktioina. Kuvassa 5.39 on esitetty opponenttikäyrän ja korrelaatiokäyrien muodostamat painofunktiot. Jatkossa termi *keskimääräinen näytteenottoväli* tarkoittaa tasavälisiä näytteenottovälejä. Epätasavälisissä menetelmissä tämä on käytännössä virtuaalinäytteenotto, joka kuvaa kanavien lukumäärää. Kanavien lukumäärä voidaan laskea näytteenottovälin avulla käyttämällä kaavaa (3.9). Kaavan antamia tuloksia on myös taulukoitu liitteeseen 2.

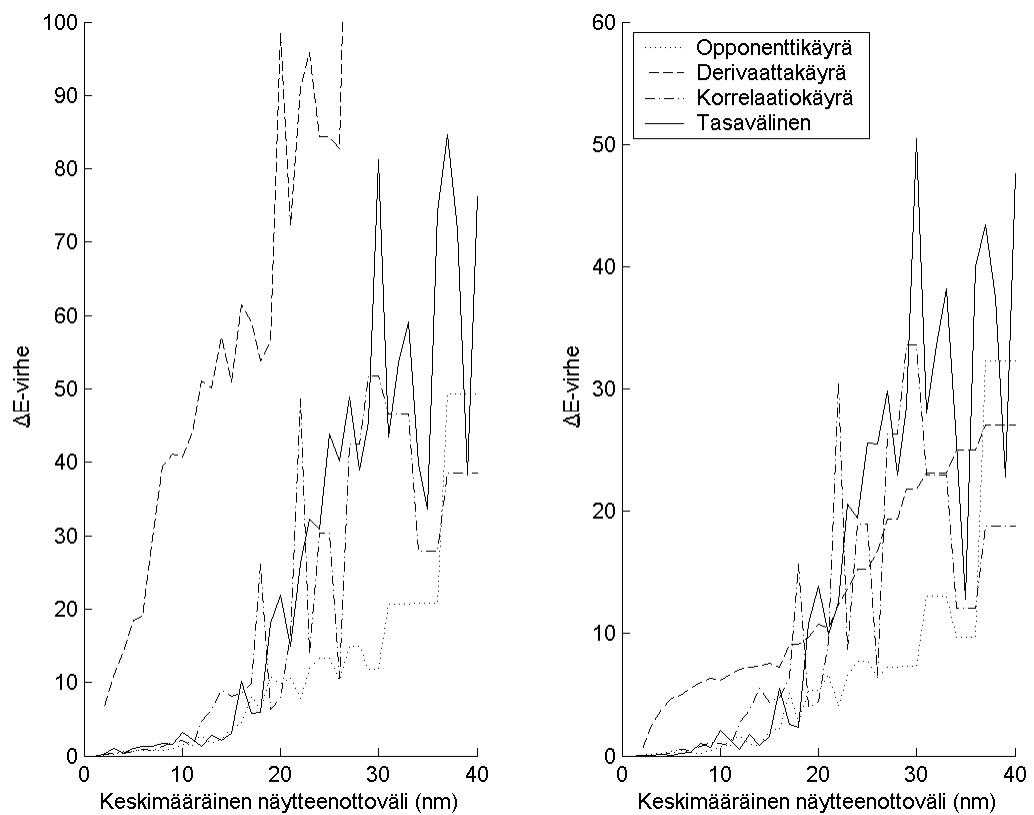


Kuva 5.39: Epätasavälisen näytteenoton painofunktioita.

Seuraavissa mittauksissa on käytetty Fairmanin interpolointia ja negatiivisten arvojen nollassa. Kuvassa 5.40 on esitetty näiden menetelmien sekä tasavälisen näytteenoton antamat  $\Delta E$ -virheet Munsell-sarjalle ilman valonlähdettä. Vasemmassa kuvassa on  $\Delta E$ -virheiden maksimit ja oikealla mediaanit. Kuvasta nähdään heti, että derivaattakäyrä on menetelmälle kelvoton. Opponenttikäyräkin on kaikkiaan huonompi kuin tasavälinen näytteenotto, mutta korrelaatiokäyrä antaa samantapaisia tuloksia tasavälisen näytteenoton kanssa. Kuvassa 5.41 on sama tilanne kuin kuvassa 5.40, mutta nyt Munsell-sarjalle valonlähteen kanssa. Derivaattakäyrä on edelleen huono, koska virhe nousee jo pienillä keskimääräisillä näytteenottoväleillä suureksi. Korrelaatiokäyrä heittelee tasavälisen näytteenoton molemmiin puolin. Opponenttikäyrä sen sijaan osoittautuu parhaaksi menetelmäksi.

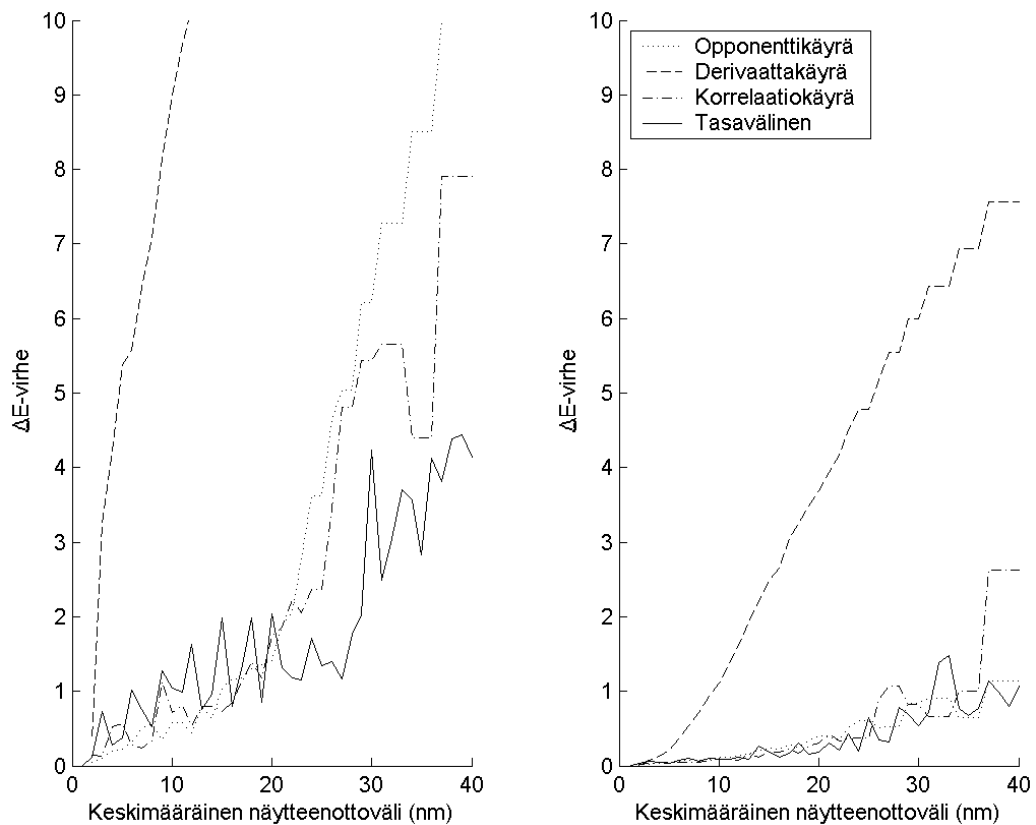


Kuva 5.40: Eri näytteenoton painofunktioiden tuottamat  $\Delta E$ -virheiden maksimit (vasemmalla) ja mediaanit (oikealla) Munsell-sarjalle ilman valonlähdettä.

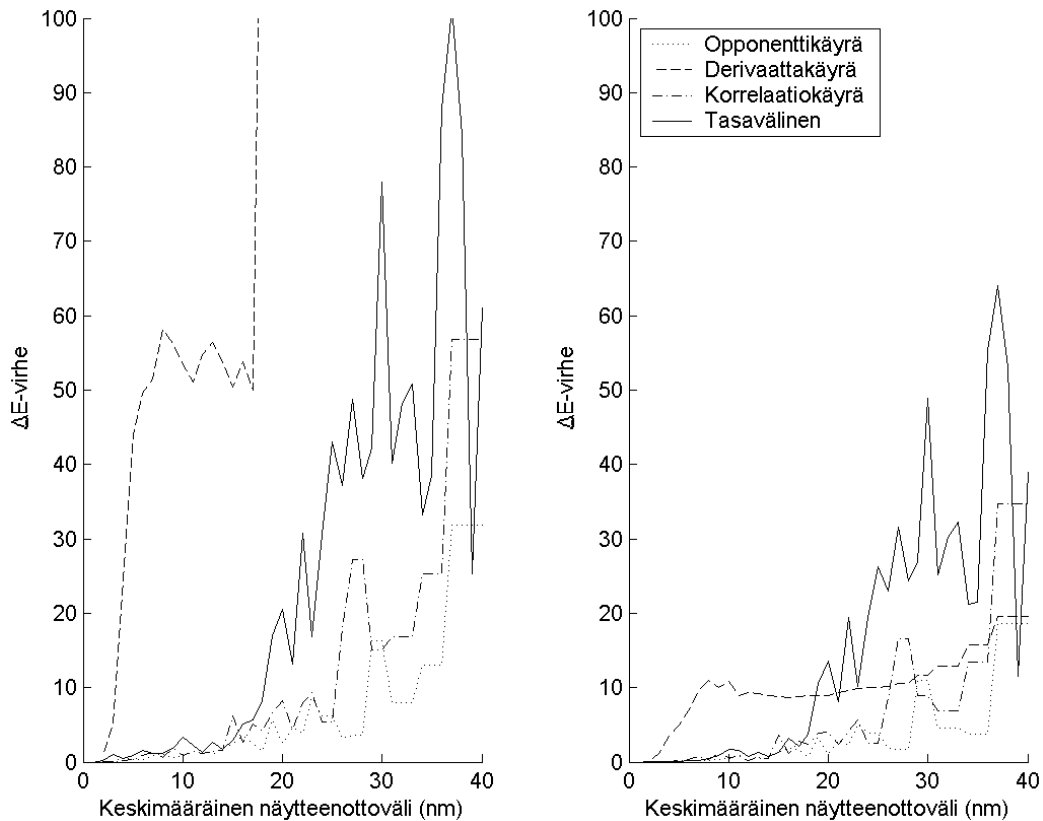


Kuva 5.41: Eri näytteenoton painofunktioiden tuottamat  $\Delta E$ -virheiden maksimit (vasemmalla) ja mediaanit (oikealla) Munsell-sarjalle valonlähteen kanssa.

Kuvissa 5.42 ja 5.43 on esitetty vastaava tilanne ihmisen herkkyyskäyrälle sovitetuille Munsell-sarjoille. Molemmille sarjoille derivaattakäyrä on edelleen kelvoton, koska tällä painofunktiolla  $\Delta E$ -virhe kasvaa jo pienillä näytteenottoväleillä suureksi. Munsell-sarjalle ilman valonlähdettä  $\Delta E$ -virheiden mediaanit ovat muiden menetelmien kesken lähes samoja. Opponenttikäyrällä ja korrelaatiokäyrällä saadaan pienimmät maksimivirheet aina n. 20 nm keskimääräiseen näytteenottoväliin asti, minkä jälkeen virhe kasvaa voimakkaasti. Tasavälinen näytteenotto muuttuu parhaaksi menetelmäksi yli 20 nm keskimääräisellä näytteenotolla. Munsell-sarjalle valonlähteen kanssa opponenttikäyrä ja korrelaatiokäyrä antavat selvästi pienimmät  $\Delta E$ -virheet.



Kuva 5.42: Eri näytteenoton painofunktioiden tuottamat  $\Delta E$ -virheiden maksimit (vasemmalla) ja mediaanit (oikealla) herkkyyskäyrälle sovitetulle Munsell-sarjalle ilman valonlähdettä.

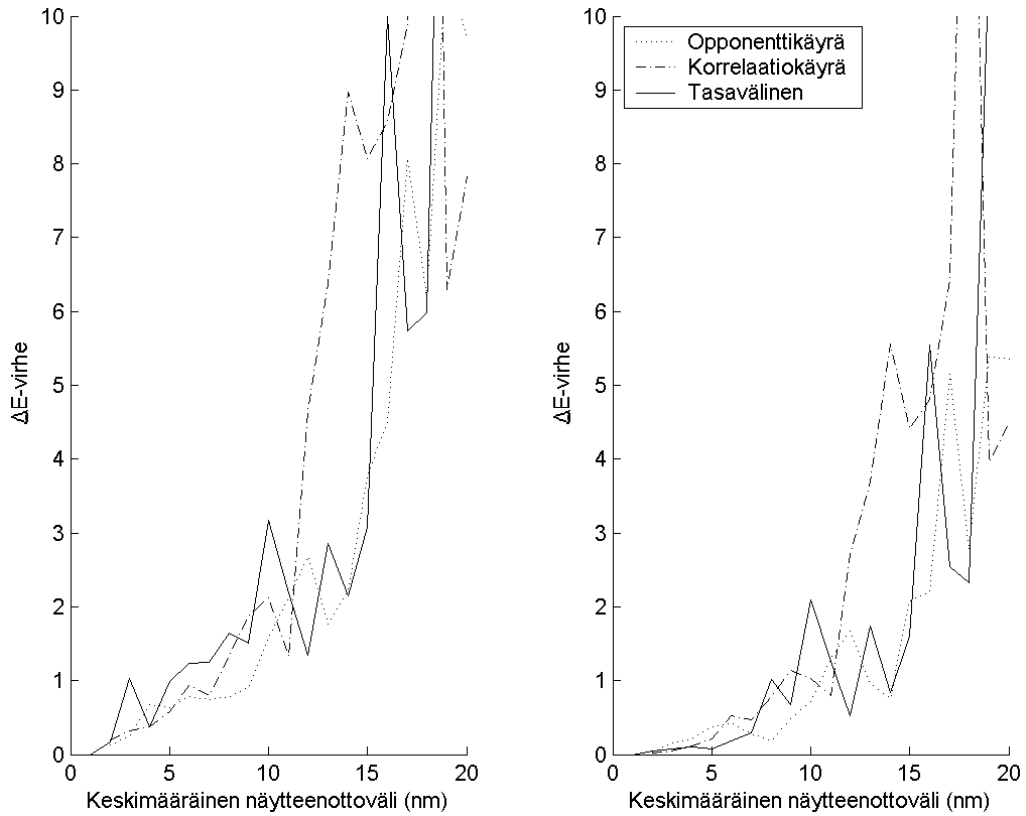


Kuva 5.43: Eri näytteenoton painofunktioiden tuottamat  $\Delta E$ -virheiden maksimit (vasemmalla) ja mediaanit (oikealla) herkkyyskäyrälle sovitetulle Munsell-sarjalle valonlähteen kanssa.

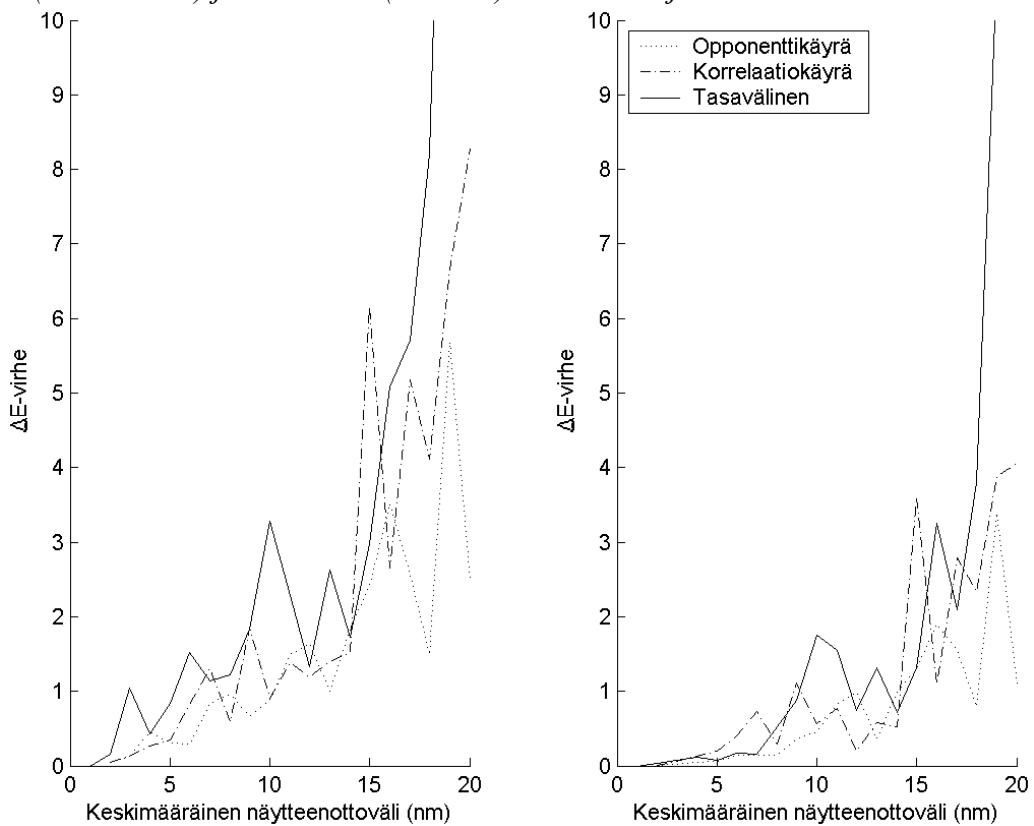
Tarkastellaan vielä tarkemmin pienempiä näytteenottovälejä Munsell-sarjalle valonlähteen kanssa. Kuvassa 5.44 on esitetty kuva 5.41 ja kuvassa 5.45 kuva 5.43, mutta nyt tarkemmin pienemmillä keskimääräisillä näytteenottoväleillä sekä ilman epäonnistunutta derivaattakäyrää. Kuvassa 5.44  $\Delta E$ -virheen maksimi on opponenttikäyrällä ja korrelaatiokäyrällä hieman pienempi tasaväliseen näytteenottoon verrattuna aina 11 nm näytteenottoväliin asti. Virheen mediaani on opponenttikäyrällä pienin 6...11 nm näytteenottovälillä, mistä löytyy myös tasavälisen näytteenoton yhteydessä optimaaliseksi valittu näytteenotto. Näytteenottoväleillä 11...20 nm korrelaatiokäyrän antama virhe muuttuu tasavälistä näytteenottoa suuremmaksi, missä taas opponenttikäyrällä saadaan samantapaisia tuloksia.

Kuvasta 5.41 voidaan edelleen todeta, että yli 20 nm keskimääräisellä näytteenottovälillä opponenttikäyrä antaa parhaan tuloksen. Mediaanivirheissä korrelaatiokäyrä antaa kaikkiaan hieman huonompia tuloksia. Kuvassa 5.45 ei ole epäselvyyttä. Opponenttikäyrä paras vaihtoehto laskettaessa niin  $\Delta E$ -virheen maksimia kuin mediaaniakin. Virhe säilyy kohtalaisena 14 nm keskimääräiseen näytteenottoväliin asti. Korrelaatiokäyrä on hieman huonompi, mutta tässäkin virhe on kelvallinen vielä 14 nm välillä. Tasavälinen näytteenotto kaiken kaikkiaan menetelmistä huonoin, tosin  $\Delta E$ -virheen mediaani on alle 8 nm keskimääräisellä näytteenottovälillä

hieman parempi kuin korrelaatiokäyrän antama virhe.



Kuva 5.44: Eri näytteenoton painofunktioiden tuottamat  $\Delta E$ -virheiden maksimit (vasemmalla) ja mediaanit (oikealla) Munsell-sarjalle valonlähteen kanssa.



Kuva 5.45: Eri näytteenoton painofunktioiden tuottamat  $\Delta E$ -virheiden maksimit (vasemmalla) ja mediaanit (oikealla) herkkyyssäilylle sovitetulle Munsell-sarjalle valonlähteen kanssa.

Taulukossa 5.25 on esitetty signaalikohinasuhteet kaikille edellä mainituille sarjoille ja menetelmille lukuun ottamatta derivaattakäyrää. Munsell-sarjalle ilman valonlähdettä signaalikohinasuhteet ovat selvästi huonompia opponenttimenetelmällä verrattuna tasaväliseen näytteenottoon. Korrelaatiokäyrän tulokset sen sijaan ovat samantapaisia kuin tasavälisellä näytteenotolla, ja ihmisen silmän herkkyyssäyrälle sovitetuille värispektreille ne ovat jopa hieman parempia. Opponenttikäyrä ja korrelaatiokäyrä antavat kaikkiaan hieman paremman tuloksen verrattuna tasaväliseen näytteenottoon Munsell-sarjalle valonlähteen kanssa ilman herkkyyssäyrää. Sovitettaessa värispektrit valonlähteen kanssa ihmisen silmän herkkyyssäyrälle, saadaan korrelaatio- ja opponenttikäyrällä erittäin hyvät tulokset. Opponenttikäyrä ja korrelaatiokäyrä antavat 20 nm keskimääräisellä näytteenotolla n. 10 dB parempia signaalikohinasuhteita verrattuna tasaväliseen näytteenottoon. Tällä näytteenottovälillä tulokset ovat samantapaisia kuin tasavälisellä näytteenotolla 10 nm välillä. Taulukossa 5.26 esitetyt signaalikohinasuhteiden huippuarvot vahvistavat edellä esitetyt asiat.

*Taulukko 5.25: Eri sarjojen, keskimääräisien näytteenottovälien ja näytteenoton painofunktioiden signaalikohinasuhteita.*

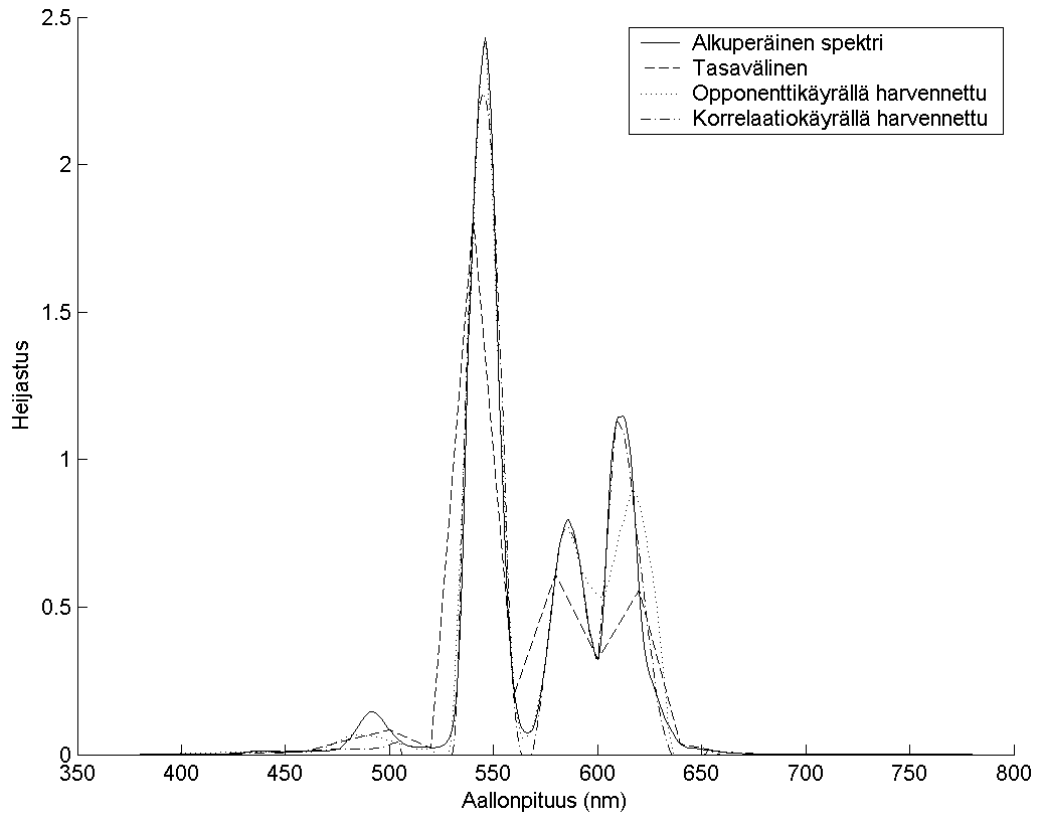
| SNR (dB)     | Munsell-sarja ilman valonlähdettä |                 |                  | Munsell-sarja ilman valonlähdettä sovitettuna herkkyyssäyrälle |                 |                  |
|--------------|-----------------------------------|-----------------|------------------|--|-----------------|------------------|
|              | Tasavälinen                       | Opponenttikäyrä | Korrelaatiokäyrä | Tasavälinen  | Opponenttikäyrä | Korrelaatiokäyrä |
| <b>5 nm</b>  | 47,6                              | 28,9            | 47,6             | 47,4   | 39,8            | 48,1             |
| <b>10 nm</b> | 45,8                              | 28,0            | 46,2             | 44,9   | 35,2            | 47,0             |
| <b>20 nm</b> | 35,7                              | 25,7            | 37,0             | 37,1   | 30,4            | 41,6             |
| <b>30 nm</b> | 31,6                              | 22,5            | 31,7             | 30,0   | 24,1            | 34,9             |
| <b>40 nm</b> | 30,6                              | 20,6            | 30,2             | 25,7   | 19,2            | 27,3             |
| SNR (dB)     | Munsell-sarja valonlähteen kanssa |                 |                  | Munsell-sarja valonlähteen kanssa sovitettuna herkkyyssäyrälle |                 |                  |
|              | Tasavälinen                       | Opponenttikäyrä | Korrelaatiokäyrä | Tasavälinen  | Opponenttikäyrä | Korrelaatiokäyrä |
| <b>5 nm</b>  | 31,5                              | 23,3            | 35,4             | 32,9   | 45,6            | 42,2             |
| <b>10 nm</b> | 18,0                              | 18,0            | 22,1             | 17,3   | 28,1            | 30,5             |
| <b>15 nm</b> | 11,4                              | 16,8            | 16,6             | 13,4   | 24,0            | 19,2             |
| <b>20 nm</b> | 6,9                               | 8,6             | 7,7              | 6,3  | 14,6            | 19,7             |



Taulukko 5.26: Eri sarjojen, keskimääräisien näytteenottovälien ja näytteenoton painofunktioiden signaalikohinasuhteiden huippuarvoja.

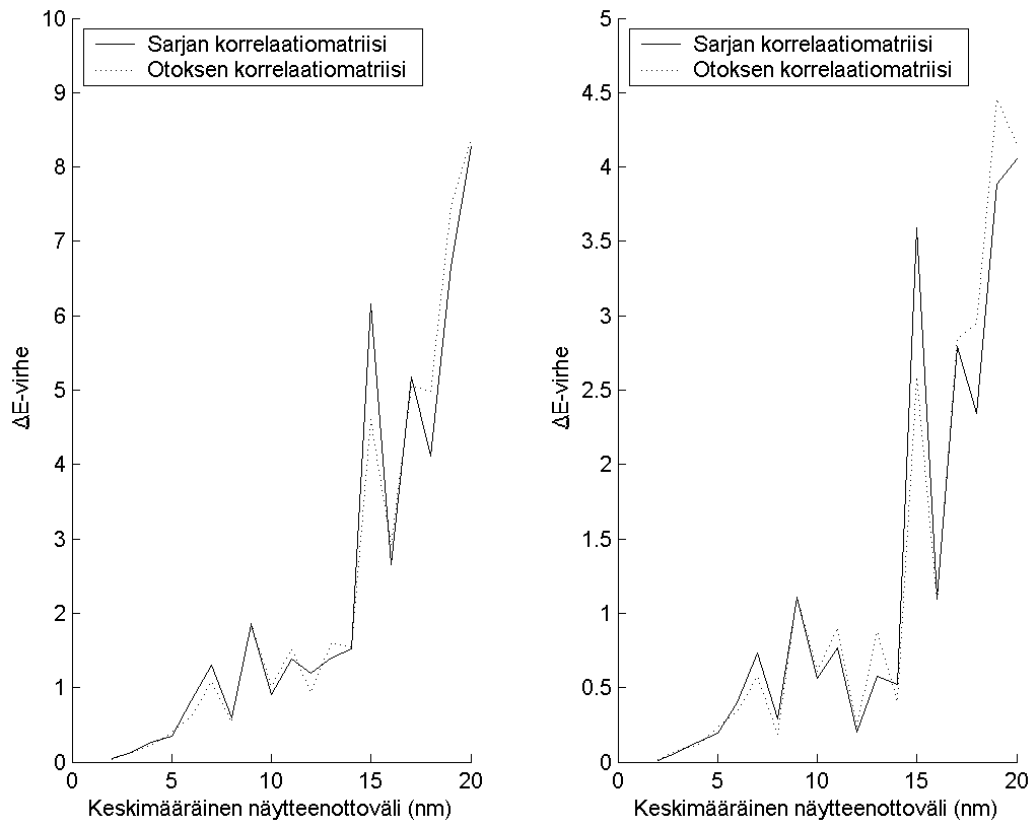
| PSNR (dB)                | Munsell-sarja ilman valonlähdettä |                 |                  | Munsell-sarja ilman valonlähdettä sovitettuna herkkyyskäyrälle |                 |                  |
|--------------------------|-----------------------------------|-----------------|------------------|--|-----------------|------------------|
| Keskim. näytteenottoväli | Tasavälinen                       | Opponenttikäyrä | Korrelaatiokäyrä | Tasavälinen  | Opponenttikäyrä | Korrelaatiokäyrä |
| 5 nm                     | 56,8                              | 38,2            | 56,8             | 63,8   | 56,2            | 64,5             |
| 10 nm                    | 55,0                              | 37,2            | 55,4             | 61,3   | 51,6            | 63,4             |
| 20 nm                    | 45,0                              | 34,9            | 46,2             | 53,5   | 46,8            | 58,0             |
| 30 nm                    | 40,9                              | 31,8            | 41,0             | 46,3   | 40,5            | 51,3             |
| 40 nm                    | 39,9                              | 29,9            | 39,4             | 42,1   | 35,6            | 43,7             |
| PSNR (dB)                | Munsell-sarja valonlähteen kanssa |                 |                  | Munsell-sarja valonlähteen kanssa sovitettuna herkkyyskäyrälle |                 |                  |
| Keskim. näytteenottoväli | Tasavälinen                       | Opponenttikäyrä | Korrelaatiokäyrä | Tasavälinen  | Opponenttikäyrä | Korrelaatiokäyrä |
| 5 nm                     | 41,4                              | 33,1            | 45,2             | 45,4   | 58,2            | 55,0             |
| 10 nm                    | 27,9                              | 27,9            | 32,0             | 29,8   | 40,6            | 43,0             |
| 15 nm                    | 21,2                              | 26,7            | 26,5             | 25,9   | 36,6            | 31,8             |
| 20 nm                    | 16,8                              | 18,5            | 17,6             | 18,9   | 27,2            | 32,3             |

Tarkastellaan seuraavaksi opponenttikäyrää ja korrelaatiokäyrää menetelminä herkkyyskäyrälle sovitetulle Munsell-sarjalle valonlähteen kanssa. Kuvassa 5.46 on alkuperäinen spektri harvennettu 20 nm keskimääräisellä näytteenottovälillä tasavälisesti sekä opponenttikäyrällä ja korrelaatiokäyrällä. Siinä opponenttikäyrällä ja korrelaatiokäyrällä luodut pisteet tuottavat selvästi paremman tuloksen kuin tasavälinen näytteenotto.



*Kuva 5.46: Esimerkki eri näytteenoton painofunktioista.*

Tutkitaan samalle sarjalle vielä otoksesta luodun korrelaatiokäyrän virhettä. Munsell-sarjan 40 värikartasta [12] on jokaisesta valittu värikkäin ja kirkkain värispektri otokseksi, jonka avulla on muodostettu korrelaatiokäyrä. Kuvasta 5.47 nähdään, että otoksen korrelaatiokäyrän antamat  $\Delta E$ -virheet koko sarjalle ovat samantapaisia verrattuna koko sarjan korrelaatiokäyrän tuottamiin virheisiin. Tämä tukee teoriaa siitä, että eri valaistuksissa voidaan mitata tarkka tasavälinen sopivien spektrien otos 1 nm tarkkuudella, jonka korrelaatiomatriisista muodostetaan näytteenoton painofunktio kaikille värispektreille.



Kuva 5.47: Herkkyyskäyrälle sovitetun Munsell-sarjan (valonlähteen kanssa)  $\Delta E$ -virheet korrelaatiokäyrällä, kun käyrä on laskettu koko sarjalla ja 40 näytteen otoksella.

## 6. YHTEENVETO

Lopuksi tiivistetään työn kulku, analysoidaan saatuja tuloksia, esitetään tarvittavia jatkotutkimuksia ja annetaan lopulliset johtopäätökset.

### 6.1 Työn kulku

Työssä esitettiin kaikkiaan kuusi eri menetelmää, missä yritettiin löytää sopiva näytteenotto värispektreille. Näitä menetelmiä olivat integraalimenetelmä, taajuustason mittaus, virheanalyysi, korrelaatiomatriisimenetelmä ja pääkomponenttianalyysi, uusi menetelmä tristimulusarvojen laskemiseksi sekä epätasavälinen näytteenotto. Kaikissa menetelmissä alkuperäinen spektri harvennettiin suoraan tallentamalla tietyt kanavat alkuperäisestä spektristä, jotka muodostivat harvennetun spektrin. Tuloksia mitattiin eri virhemitoilla, kuten  $\Delta E$ -virheellä.

Integraalimenetelmässä vertailtiin alkuperäisien 1 nm tarkkuudella mitattujen ja eri näytteenottoväleille harvennettujen värispektrien absoluuttisten pinta-alojen erotuksia aallonpituutta kohti. Samalla selvitettiin myös sopivinta menetelmää Riemannin ylä- ja alasummasta, puolisuunnikkasäännöstä ja Simpsonin säännöstä. Taajuustason mittaus perustui Fourier-muunnoksen avulla laskettuihin spektrien energioihin eri taajuuksilla. Koska taajuudella ja näytteenottovälillä on yhteys, pystyttiin menetelmällä valitsemaan värispektrisarjalle sopiva rajataajuus ja laskemaan siitä sopiva näytteenottoväli. Korrelaatiomatriisimenetelmässä tutkittiin eri näytteenottovälien keskimääräistä korrelaatiota. Samalla laskettiin myös spektrisarjoille sopiva kantavektorien määrä pääkomponenttianalyysiin perustuvassa menetelmässä, jossa värispektrisarja esitetään pienemmällä määrällä parametreja. Työssä käsiteltiin lyhyesti myös *Li et al.* [20] esittämä menetelmä tristimulusarvojen laskemiseksi. Lisäksi esiteltiin menetelmä epätasaväliselle näytteenotolle, missä harvennetun värispektrin pisteet valittiin eri painofunktioiden muodostamien jakopisteiden mukaan. Jakopisteet jakoivat painofunktion integraalin mahdollisimman tasaisesti. Kaikissa menetelmissä käytettiin testiaineistona Munsell-spektrisarjan heijastusspektrejä sellaisenaan sekä valonlähteen kanssa. Munsell-sarjoja käytettiin lisäksi sovitettuna ihmisen silmän herkkyyssäyrän kanssa.

### 6.2 Tulosten analysointi

Integraalimenetelmä osoitti selvästi Riemannin ylä- ja alasumman kelvottomaksi integraalin laskentaan. Nämä ovatkin epätarkkoja menetelmiä jo määritelmänsä perusteella. Puolisuunnikkasäännöllä ja Simpsonin säännöllä saatiin likipitäen yhtä hyviä tuloksia, mutta  $\Delta E$ -virheiden

laskentaan Simpsonin sääntö ei sopinut. Näytteenottovälin kasvaessa Simpsonin sääntö käyristää spektriä väärin, eivätkä tulokset ole enää edullisia tristimulusarvojen laskentaan. Integraalimenetelmä ei kuitenkaan osoittautunut oikeaksi lähestymistavaksi optimaalisen näytteenoton hakuun, sillä puolisuunnikassäännön ja Simpsonin säännön tulokset olivat lähellä absoluuttista keskivirhettä MAE, mitä käytettiin virhemittana.

Taajuustason mittauksessa spektrisarjan energiarajan minimi ylitti 99,0% jo hyvinkin matalilla taajuuksilla, jolloin tämän rajan ja 99,9%-rajan taajuusero muodostui valtavan suureksi. Näin ollen näitä *Bonnardelin & Maloneyn* [3] käyttämiä rajoja ei tulisi suoraan käyttää, koska tuloksena saatujen näytteenottovälien ero voi näillä energiarajoilla olla jopa useita kymmeniä nanometrejä. Haarukointi osoittautui kelvolliseksi menetelmäksi, ja tämän avulla optimaaliseksi näytteenottoväleiksi saatiin Munsell-sarjalle ilman valonlähdettä 39 nm ja valonlähteen kanssa 8 nm. Vastaavat ihmisen silmän herkkyyssäyrälle sovitettujen sarjojen tulokset olivat 30 nm (arvio 5 nm tarkkuudella) ja 9 nm. Munsell-sarjan spektrit ovat tasaisia, jolloin niille riittää suuri näytteenottoväli. Sen sijaan spektrisarjalle valonlähteen kanssa pieni näytteenottoväli johtui yksinomaan spektrien piikkisyydestä. Taajuusrajoitettu spektri (kaava 3.10) kuvasi hyvin syntyynyttä spektriä rajataajuuden funktiona.

Haarukointi ei yksin riittänyt optimaalisen näytteenottovälin valintaan. Erityisesti matalilla taajuuksilla menetelmä on epätarkka näytteenottoväliin nähden. Mittaukseen otettiin mukaan myös muita virhemittoja, joista yksi oli  $\Delta E$ -virhe. Virheen laskennassa huomioitiin eri integrointimenetelmät, joista vain puolisuunnikassääntö ja normaali tulojen summa antoivat kelvollisia tuloksia. Nämä menetelmät antoivat keskenään lähes saman tuloksen, mikä on myös todistettavissa kaavan (6.1) mukaisesti. Virheen laskennan yhteydessä kokeiltiin myös Fairmanin interpolointia, missä spektrit interpoloitiin 1 nm tarkkuuteen ennen laskentaa. Interpolointimenetelmä osoittautui hyödyttömäksi antaen likipitään saman tuloksen kuin normaali tulojen summa, mutta osoitti sen, että interpolointi ei nosta virhettä. Tästä seuraa, että interpolointi voidaan tehdä teknisistä syistä. Esimerkiksi muiden virhemittojen laskenta vaati interpolointia, jotta vertailtaville spektreille saatiin keskenään vertailukelpoiset kanavat.

$$\begin{aligned}
V('Puolisuunnikassääntö') &= \frac{100 \sum_{i=2}^n \frac{\Delta}{2} [v(x_{i-1}) + v(x_i)]}{\sum_{i=2}^n \frac{\Delta}{2} [v_l(x_{i-1}) + v_l(x_i)]} \\
&\Leftrightarrow \frac{100 \sum_{i=2}^n [v(x_{i-1}) + v(x_i)]}{\sum_{i=2}^n [v_l(x_{i-1}) + v_l(x_i)]} \\
&\Leftrightarrow \frac{100 \sum_{i=1}^n v(x_i) - \frac{1}{2} [v(x_1) + v(x_n)]}{\sum_{i=1}^{n_l} v_l(x_i) - \frac{1}{2} [v_l(x_1) + v_l(x_n)]} \approx V('Summa')
\end{aligned} \tag{6.1}$$

$\Delta E$ -virheen maksimi nousi nopeasti yli 0,5-rajan sarjassa olevan kohinan vuoksi, mutta virhe säilyi kelvollisena aina 29 nm näytteenottovälille asti Munsell-sarjalle ilman valonlähdettä. Niinpä 39 nm valinta taajuustason haarukoinnissa ei tullut enää kysymykseen. Virheellinen tulos johtui loivasta energiakäyrästä, jolloin haarukointi oli vaikeaa. Valonlähteen kanssa sopiva näytteenottoväli oli 8...9 nm, joskin 12 nm ja 14 nm antoivat vielä kelvollisen virheen. Ihmisen herkkyyssävellä sovitusta ei muuttanut näitä näytteenottovälejä. Tristimulusarvojen laskentaan kokeiltiin myös *Li et al.* [20] kehittämää uutta menetelmää, joka menetelmänä osoittautui kyseenalaiseksi antaen selvästi huonommat tulokset.

Muut käytetyt virhemitat antoivat hyviä tuloksia Munsell-sarjalle ilman valonlähdettä kaikilla lasketuilla näytteenottoväleillä. Spektrisarjalle valonlähteen kanssa virhe säilyi kelvollisena vielä 9 nm näytteenottovälillä, mutta  $\Delta E$ -virheen yhteydessä valitut 12 nm ja 14 nm antoivat jo huonoja tuloksia, jolloin ko. näytteenottoväleiltä löytyi metamerisiä ominaisuuksia. Niitä löytyi myös 35 nm ja 39 nm näytteenottoväleiltä. Optimaalisiksi näytteenottoväleiksi valittiin 29 nm Munsell-sarjalle ilman valonlähdettä ja 9 nm valonlähteen kanssa. Vastaavat mittaukset ihmisen silmän herkkyyssävellä sovitettuna tuottivat samat näytteenottovälit. Tämä on esitetty tiivistetysti taulukossa 6.1.

Taulukko 6.1: Eri menetelmillä saatuja optimaalisia näytteenottovälejä.

| Testiaineisto   | Taajuus-<br>tason<br>mittaus | $\Delta E$ -virhe | Muut<br>virhemitat | Optimaalinen<br>näytteen-<br>ottoväli |
|---|------------------------------|-------------------|--------------------|---------------------------------------|
| Munsell-sarja ilman valonlähdettä                                 | 39 nm                        | 29 nm             | 40 nm              | 29 nm                                 |
| Munsell-sarja valonlähteen kanssa                                 | 8 nm                         | 9 nm,<br>14 nm    | 9 nm               | 8...9 nm                              |
| Munsell-sarja ilman valonlähdettä<br>sovitettuna herkkyyskäyrälle | 30 nm                        | 29 nm             | 40 nm              | 29 nm                                 |
| Munsell-sarja valonlähteen kanssa<br>sovitettuna herkkyyskäyrälle | 9 nm                         | 9 nm,<br>14 nm    | 9 nm               | 9 nm                                  |

Työssä tutustuttiin myös optimaalisen näytteenottovälin valintaan korrelaatiomatriisin avulla. Korrelaatiomatriisi osoitti, että Munsell-sarjalle ilman valonlähdettä riittää suuri näytteenottoväli, missä taas valonlähteen kanssa vaaditaan huomattavasti pienempi näytteenottoväli. Linjojen keskiarvo on myös suuntaa antava, ja korrelaatoraja eri Munsell-sarjoille löytyi 0,7...0,85 alueelta. Sopivaa yksittäistä tulosta on kuitenkin vaikea etsiä. Tässä tutkielmassa korrelaatiomatriisiin ei kuitenkaan varsinaisesti paneuduttu, eikä tarkempaa analyysiä tässä pysty määrittelemään.

Pääkomponenttianalyysissä kantavektoreiden tiedosta saatiin säilytettyä yli 99,9% Munsell-sarjalle ilman valonlähdettä 7 kantavektorilla ja valonlähteen kanssa 4 kantavektorilla. Tämän osoittivat myös signaalikohinasuhteiden huippuarvot, mikä säilyi yli 40 dB alkuperäiseen 1 nm tarkkuuteen nähden. Huomioitavana seikkana on, että kantavektorien laskenta vaati värispektreiltä vähintään edellä esitetyt optimaaliset näytteenottovälit. Vasta näitä rajoja suuremmilla näytteenottoväleillä spektrien signaalikohinasuhteen huippuarvot alkoivat laskea. Signaalikohinasuhteen huippuarvoja ei myöskään enää suurilla näytteenottoväleillä saatu säilytettyä kasvattamalla kantavektorien määrää. Erityisesti Munsell-sarjalle valonlähteen kanssa 10 nm ja tätä harvemmat näytteenottovälit pitivät signaalikohinasuhteen lähes vakiona riippumatta kantavektorien määrästä.

Virhemitoista  $\Delta E$ -virhe antoi tulokseksi 7 kantavektoria riittäväksi määräksi Munsell-sarjalle ilman valonlähdettä. Valonlähteen kanssa vaadittiin 6 kantavektoria, jotta  $\Delta E$ -virheen maksimi olisi ollut kelvollinen. Tässä 4 kantavektoria antaa jo hyvän tuloksen keskiarvolle, mutta maksimivirhe on erittäin suuri, mikä johtuu yksittäisien värispektrien antamasta virheestä.

Mielenkiintoista on myös, että optimaalisia näytteenottovälejä tarkemmilla spektreillä  $\Delta E$ -virhe alkuperäiseen 1 nm spektriin nähden säilyi lähes vakiona ja vastaavasti korkeammilla näytteenottoväleillä kasvoi voimakkaasti, kun käytettiin 7 kantavektoria. Menetelmä osoitti tarvittavien kantavektorien määrän lisäksi myös valittujen optimaalisten näytteenottovälien paikkaansa pitävyyden.

Epätasavälinen näytteenotto vaati värispektrien interpolointia tasaväliseksi, koska käytettyjä virhemittoja ei ole suunniteltu epätasavälisille näytteille. Fairmanin interpolointi tuotti spektreille negatiivisia arvoja erityisesti käytettäessä ihmisen silmän herkkyyssäyrää näytteenoton laskennan painofunktiona. Negatiiviset arvot tuli siten nollata. Fairmanin interpoloinnin ansiosta käytettävällä integraalin laskentamenetelmällä ei juuri ollut merkitystä.

Derivaattaan perustuva painofunktio antoi huonoimmat tulokset. Tässä menetelmässä jakopisteet sijoituivat piikin nousulle tai laskulle eikä niinkään piikin juurelle tai huipulle, joka teoriassa voisi olla parempi sijainti. Toisaalta derivaattaan perustuvaa painofunktiota ei voi myöskään käyttää peilattuna aallonpituusakselin suhteen, koska silloin jakopisteet sijoittuisivat värispektrin tasaisille alueille hävittäen piikit. Ihmisen silmän herkkyyssäyrä ei myöskään sopinut painofunktioksi spektrien päihin jäävän suurien näytteenottovälien vuoksi. Samat ongelmat esiintyivät samoista syistä myös ihmisen silmän herkkyyssäyrälle sovitetuilla spektrisarjoilla.

Opponenttikäyrässä on sama ongelma kuin ihmisen silmän herkkyyssäyrällä. Spektrin loppupäähän syntyy iso näytteenottoväli. Munsell-sarjalle ilman valonlähdettä menetelmä antoi tästä syystä huonoimmat tulokset. Tulos kuitenkin korjaantui käytettäessä ihmisen silmän herkkyyssäyrälle sovitettuja värispektrejä. Alle 20 nm näytteenottovälillä  $\Delta E$ -virheen maksimi parani hieman tasaväliseen näytteenottoon verrattuna, mutta muuttui tämän jälkeen samantapaiseksi. Ihmisen silmän herkkyyssäyrä pudottaa värispektrien päät tasaiseksi kohdaksi lähelle nollaa, mihin sopii harva näytteenottoväli keskimääräiseen 20 nm rajaan asti. Sarjalle valonlähteen kanssa opponenttikäyrän antama parannus oli merkittävä. Värispektrien päissä lähellä nollaa olevat arvot muodostavat tasaiset kohdat, jolloin opponenttikäyrän spektrien päiden ongelma ei ole enää niin merkittävä. Sovitettaessa sarja ihmisen silmän herkkyyssäyrään spektrien päiden tasaisuus vain lisääntyi laajemmalle alueelle jättäen vain keskimäiset piikit esille. Tällöin päiden ongelmaa ei enää esiintynyt, ja opponenttikäyrä osoittautui selvästi parhaaksi menetelmäksi riippumatta keskimääräisestä näytteenottovälistä.



Korrelaatiokäyrä hakee vähiten korreloivia alueita ja asettaa niihin pienemmän näytteenottovälin verrattuna korreloiviin alueisiin. Munsell-sarjalle ilman valonlähdettä menetelmä antoi kaikkiaan samantapaisia tuloksia kuin tasavälisellä näytteenotolla, lukuun ottamatta herkkyyskäyrään sovitetuissa värispektreissä yli 20 nm keskimääräisiä näytteenottovälejä. Herkkyyskäyrälle sovittamattomien värispektrien korrelaation muodostama painofunktio on melko tasainen, jolloin pisteiden sijainti ei paljoakaan muutu tasaväliseen näytteenottoon nähden. Ihmisen silmän herkkyyskäyrälle sovitetuille värispektreille painofunktio sijoittaa kanavia enemmän aallonpituusalueen keskelle, jolloin suurilla keskimääräisillä näytteenottoväleillä syntyy spektrin päihin vieläkin suuremmat näytteenottovälit.

Korrelaatiokäyrällä tulokset olivat hieman parempia sarjalle valonlähteen kanssa, vaikka  $\Delta E$ -virheen suuruus alkoikin vaihdella tasavälisen näytteenoton molemmiin puolin keskimääräisen näytteenottovälin kasvaessa yli 11 nm. Tässä keskimääräinen näytteenottoväli on jo kuitenkin suurempi kuin valittu optimaalinen näytteenottoväli. Menetelmä tuottaa melko kapeat piikit painofunktiolle, jolloin integraalin kertyminen täyteen voi joillakin näytteenotoilla osua oikein piikeille ja joillakin näytteenotoilla taas piikkien ulkopuolelle. Tästä seuraa virheen suuri vaihtelu näytteenoton muuttuessa tasaisesti. Sovitettaessa spektrit ihmisen silmän herkkyyskäyrälle saadaan piikeille enemmän huomiota. Samalla myös värispektrien päiden tasaiset kohdat jäävät vähemmälle huomiolle, jolloin piikeille riittää enemmän jakopisteitä. Tästä seuraa virheen merkittävä pieneneminen. Korrelaatiomatriisi on pitkälti käytetystä valonlähteestä riippuvainen, jolloin sen laskenta otoksesta tuottaa myös kelvollisen tuloksen.

Korrelaatiokäyrä ja opponenttikäyrä eivät paranna optimaalista keskimääräistä näytteenottoväliä Munsell-sarjalle ilman valonlähdettä. Näillä menetelmillä saatu väli sijoittuu molemmilla menetelmillä 20...25 nm välille, mikä on hieman huonompi verrattuna tasaväliseen näytteenottoon. Sen sijaan Munsell-sarjalle valonlähteen kanssa molemmat menetelmät nostavat optimaalisen keskimääräisen näytteenottovälin ilman ihmisen silmän herkkyyskäyrää 11 nm välille ja herkkyyskäyrään sovitettuna 14 nm välille. Edellä esitetty analyysi on vielä tiivistetysti taulukossa 6.2.

Taulukko 6.2: Opponenttikäyrän ja korrelaatiokäyrän vertailu tasaväliseen näytteenottoon.

| Testiaineisto   | Opponenttikäyrä   | Korrelaatiokäyrä  |
|---|---|---|
| <b>Munsell-sarja ilman valonlähdettä</b>                              | Huonompi loppupäähän jäävän suuren näytteenottovälin vuoksi. Optimaalinen keskimääräinen näytteenottoväli on 20...25 nm.  | Painofunktio on melko tasainen, jolloin tulokset ovat samantapaisia. Optimaalinen keskimääräinen näytteenottoväli on 20...25 nm.  |
| <b>Munsell-sarja valonlähteen kanssa</b>                              | Hyvä tulos. Spektrien päissä on jo muutenkin tasaista, jolloin menetelmä antaa parempia tai samantapaisia tuloksia. Optimaalinen keskimääräinen näytteenottoväli on 11 nm.  | Piikikäs tulos. Painofunktion kapeat piikit saavat toisilla ja eivät saa toisilla näytteenotoilla tarpeeksi jakopisteitä. Optimaalinen keskimääräinen näytteenottoväli on 11 nm.  |
| <b>Munsell-sarja ilman valonlähdettä sovitettuna herkkyyskäyrälle</b> | Herkkyyskäyrä vaimentaa spektrien päiden ongelmaa suuresta näytteenottovälistä. Toimii 20 nm keskimääräiseen näytteenottoväliin asti antaen samantapaisia tai hieman parempia tuloksia. Optimaalinen keskimääräinen näytteenottoväli on 20...25 nm. | Pisteitä pyrkii runsaasti aallonpituusalueen keskelle, jolloin näytteenottovälin kasvaessa spektrien päihin jää suuri näytteenottoväli. Tulokset ovat samantapaisia tai parempia 20 nm keskimääräiseen näytteenottoväliin asti. Optimaalinen keskimääräinen näytteenottoväli on 20...25 nm. |
| <b>Munsell-sarja valonlähteen kanssa sovitettuna herkkyyskäyrälle</b> | Erinomainen tulos. Spektrien päät tasaantuvat entisestään, jolloin saadaan erittäin hyvä tulos. Optimaalinen keskimääräinen näytteenottoväli on 14 nm.  | Erinomainen tulos. Antaa spektrien päistä jakopisteitä erityisesti piikeille. Optimaalinen keskimääräinen näytteenottoväli on 14 nm.  |

### 6.3 Jatkotutkimus

Taajuustason menetelmän heikkous on optimaalisen näytteenottovälin haarukointi. Haaru-koinnin sijaan olisi hyvä kehittää jokin suorempi menetelmä, mahdollisesti suoraan sopiva energiaraja. Korrelaatiomatriisimenetelmää tulisi myös tutkia huomattavasti tarkemmin, kuten esimerkiksi  $L^*a^*b^*$ -avaruudessa viitteen [6] tapaan. Lisäksi tässä tutkielmassa spektrien harvennus tapahtui suoraan poimimalla valitut kanavat alkuperäisestä spektristä. Matemaattisesti lasketun ja fysikaalisesti mitatun harvemman näytteenoton omaavan spektrin samankaltaisuus jäi selvittämättä.

Epätasavälisessä näytteenotossa tulisi selvittää sopivin interpolointimenetelmä. Tässä tutkielmassa käytettiin ainoastaan Fairmanin interpolointia, mikä tuotti heijastusspektreille paikoin negatiivisia arvoja. Menetelmässä ei myöskään kiinnitetty huomiota painofunktion integraalin laskentamenetelmään, vaan siinä käytettiin suoraan Simpsonin sääntöä. Lisäksi ihmisen herkkyyskäyrään ja opponenttikäyrään perustuvien painofunktioiden muodostamat näytteenotot

jättivät isot näytteenottovälit spektrin päihin. Menetelmää olisi hyvä kehittää antamalla jakopisteille hieman enemmän tilaa näille alueille, jolloin saadut tulokset voisivat olla huomattavasti parempia.

Korrelaatiokäyrään perustuvassa näytteenotossa voitaisiin mahdollisesti käyttää jotakin valaistuskohdasta otosta, joka riittää arvioimaan tietyssä valaistuksessa mitattavien värispektrien kanavien välistä korrelaatiota. Tällöin tietyssä valaistuksessa voitaisiin sopivalla otoksella muodostaa korrelaatiomatriisi, jonka perusteella epätasavälisessä näytteenotossa käytettävä painofunktio luodaan. Tästä tulisikin selvittää menetelmän mahdollisuus, valonlähteen vaikutus korrelaatioon ja sopivan otoksen sisältö.

Epätasavälisessä näytteenotossa derivaattaan perustuva painofunktio oli kelvoton. Kuitenkin pisteiden välimatka tarkan värispektrin määräämää reittiä pitkin kulki on likipitään vakio, koska derivaattaan perustuvan painofunktion integraali jaettiin lähes tasavälisesti. Näin harvennettu spektri olisi mahdollista interpoloida siten, että tämä välimatka säilyisi, jolloin virhe voi pienentyä. Toisaalta, derivaattaan perustuva funktio tarvitsee alkuperäiset spektrit, jolloin menetelmällä ei juurikaan ole käyttötarkoitusta. Jo matemaattisena mittana laskenta on liian monimutkaista ja aikaa vievää.

#### **6.4 Yleiset johtopäätökset**

Munsell-sarjalle ilman valonlähdettä saatiin samankaltaiset optimaaliset näytteenottovälit kuin kirjallisuudessa esitetyissä tuloksissa, joita luvussa 1 käsiteltiin. Aikaisemmissa tutkimuksissa on kuitenkin ollut ongelmana alkuperäisen testiaineiston harva 5 nm tai 10 nm näytteenottoväli. Tällöin taajuuksia on verrattu aineistoon, missä ei ole korkeita taajuuksia lainkaan. Värispektrien kanava-arvojen interpoloinnista huolimatta informaatio ei lisääntynyt, sillä kerran poistettuja korkeita taajuuksia ei saada ekstrapoloitua takaisin. Mukana oli myös tutkimuksia, missä käytetty näytteenottoväli oli 1 nm, mutta nämä värispektrit lienevät yhtä tasaisia kuin Munsell-sarjan spektrit. Munsell-sarja valonlähteen kanssa oli huomattavasti vaativampi näytteenottovälin suhteen piikkisyyden vuoksi. Tämän sarjan vaativuus ei kuitenkaan yllä *Romero et al.* [26] mainitsemiin F-lamppuihin, missä 0,04 sykliä/nm saatiin tallennettua vain 78% energiasta. Munsell-sarjalla valonlähteen kanssa tällä rajataajuudella päästiin jo 97,3% energiaraan. *Romero et al.* esittämät tulokset viittaavatkin siihen, että F-lamput vaativat todella tarkan näytteenoton.

Kaiken kaikkiaan, mitä tarkempi alkuperäinen näytteenotto, sitä tarkempi värispektri. Toisaalta mittauksessa voi syntyä merkittävää kohinaa käytettäessä tarkkaa näytteenottoa. Taulukossa 6.3 on esitetty 1 nm, 5 nm, 10 nm ja 20 nm käyttötarkoituksia. Käytetty valonlähde vaikuttaa huomattavasti värispektrien piikkisyyteen, mikä taas vaikuttaa vaadittuun näytteenottoväliin. Tasaisille heijastusspektreille riittää varmasti 10 nm näytteenottoväli. Hyvin tasaisille värispektreille voi riittää jopa 20 nm näytteenottoväli, kuten Munsell-sarjan spektreille riitti. Sen sijaan piikkiselle datalle ei riitä 10 nm näytteenottoväliksi. Vaikka F-lampuille vaadittu näytteenottoväli voi lähentyä 1 nm tarkkuutta, riittänee 5 nm näytteenottoväli useimpiin muihin käyttötarkoituksiin. Epätasavälisellä näytteenotolla voidaan virhettä yrittää pienentää käyttämällä sopivaa keskimääräistä näytteenottoväliä sekä korrelaatiokäyrään tai opponenttikäyrään perustuvaa painofunktiota.

*Taulukko 6.3: Eri näytteenottovälien käyttötarkoitus.*

| <b>Näytteenottoväli</b> | <b>Käyttötarkoitus</b>  |
|-------------------------|---|
| <b>1 nm</b>             | Mihin tahansa, ei kuitenkaan kohina-alttiille mittaukselle.   |
| <b>5 nm</b>             | Useimpiin tarkoituksiin, myös piikkikäille värispektreille. Ei sovellu erityisen kapea-piikkisille värispektreille.     |
| <b>10 nm</b>            | Tasaiset heijastusspektrit. Ei kelpaa enää piikkikäille (esim. fluoresoivan lampun valossa mitatuille) värispektreille. |
| <b>20 nm</b>            | Erittäin tasaiset heijastusspektrit ja mittaukseen, jossa värispektrien tarkkuus ei ole niin merkittävää.               |

## VIITELUETTELO

- [1] Ajito, T., Obi, T., Yamaguchi, M. and Ohyama, N.: Six-primary color projection display for expanded color gamut reproduction. *In Proceedings, International Symposium on Multispectral Imaging and Color Reproduction, Chiba, Japan, October 21-22*, pp. 135-138, 1999.
- [2] Berns, R.: *Billmeyer and Saltzman's Principles of Color Technology, 3rd edition*. John Wiley & Sons, New York, USA, 2000.
- [3] Bonnardel, V. and Maloney, L.: Daylight, biochrome surfaces and human chromatic response in the Fourier domain. *Journal of the Optical Society of America A*, 17(4), pp. 677-686, 2000.
- [4] Brewer, W. and Holly, F.: Syntheses of Spectral-Distribution Curves. *Journal of the Optical Society of America*, 38(10), pp. 858-874, 1948.
- [5] Buchsbaum, G. and Gottschalk, A.: Chromacity coordinates of frequency-limited functions. *Journal of the Optical society of America A*, 1(8), pp. 885-887, 1984.
- [6] Early, E. and Nadal, M.: Uncertainty Analysis for Reflectance Colorimetry. *Color Research and Application*, 29(3), pp. 205-216, 2004.
- [7] Fairman, H.: The Calculation of Weight Factors for Tristimulus Integration. *Color Research and Application*, 10(4), pp. 199-203, 1985.
- [8] Gardner, J.: Uncertainty Estimation in Colour Measurement. *Color Research and Application*, 25(5), pp. 349-355, 2000.
- [9] Gerald, C. and Wheatley, P.: *Applied Numerical Analysis 5th ed.* Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, USA, 1994.
- [10] Giorgianni, E. and Madden, T.: *Digital Color Management Encoding Solutions*. Addison-Wesley Longman, Reading, Massachusetts, USA, 1998.

- [11] Hauta-Kasari, M.: *Computational Techniques for Spectral Image Analysis*. Väitöskirja. Lappeenrannan teknillinen korkeakoulu, Lappeenranta, 1999.
- [12] Hiltunen, J.: *Database – Munsell Colors Matt (Spectrofotometer measured)*. Internet WWW-sivu, URL: [http://spectral.joensuu.fi/databases/download/munsell\\_spec\\_matt.htm](http://spectral.joensuu.fi/databases/download/munsell_spec_matt.htm) (17.06.2004).
- [13] Ifeachor, E. and Jervis, B.: *Digital Signal Processing: A Practical Approach*. Prentice Hall, Harlow, UK, 2002.
- [14] Jaaskelainen, T., Parkkinen, J. and Toyooka, S.: Vector-subspace model for color representation. *Journal of the Optical Society of America A*, 7(4), pp. 725-730, 1990.
- [15] Kaarna, A.: *Multispectral Image Compression Using the Wavelet Transform*. Väitöskirja. Lappeenrannan teknillinen korkeakoulu, Lappeenranta, 2000.
- [16] Kaiser, P. and Boynton, R.: *Human Color Vision, 2nd ed.* Optical Society of America, Washington, DC, USA, 1996.
- [17] Kohonen, O.: *Lights of the Joensuu University Color Laboratory*. Intranet WWW-sivu, URL: <http://spectral.joensuu.fi/intra/valot/index.html> (17.06.2004).
- [18] Koponen, P.: *Spektrivideo*. Diplomityö. Lappeenrannan teknillinen korkeakoulu, Lappeenranta, 1999.
- [19] Lehtonen, J.: *Värispektrikuvien tehokas siirto tietoverkoissa*. Luonnontieteiden kandidaatin tutkielma. Joensuun yliopisto, Joensuu, 2002.
- [20] Li, C., Luo, M. and Rigg, B.: A New Method for Computing Optimum Weights for Calculating CIE Tristimulus Values. *Color Research and Application*, 29(2), pp. 91-103, 2004.
- [21] Maloney, L.: Evaluation of linear models of surface spectral reflectance with small number of parameters. *Journal of the Optical Society of America A*, 3(10), pp. 1673-1683, 1986.

- [22] Moon, P. and Spencer, D.: Polynomial Representation of Reflectance Curves. *Journal of the Optical Society of America*, 35(9), pp. 597-600, 1945.
- [23] Morovic, P.: *Metamer sets*. Ph.D. Thesis. University of East Anglia, Norwich, UK, 2002.
- [24] Parkkinen, J., Hallikainen, J. and Jaaskelainen, T.: Characteristic spectra of Munsell colors. *Journal of the Optical Society of America A*, 6(2), pp. 318-322, 1989.
- [25] Romero, J., Jiménez del Barco, L. and Hita, E.: Mathematical reconstruction of color-matching functions. *Journal of the Optical society of America A*, 9(1), pp. 25-29, 1992.
- [26] Romero, J., Valero, E., Hernández-Andrés, J. and Nieves, J.: Color-signal filtering in the Fourier-frequency domain. *Journal of the Optical society of America A*, 20(9), pp. 1714-1724, 2003.
- [27] Schettini, R.: Deriving Spectral Reflectance Functions of Computer-Simulated Object Colours. *Computer Graphics Forum*, 13(4), pp. 211-217, 1994.
- [28] Stiles, W., Wyszecki, G. and Ohta, N.: Counting metameric object-color stimuli using frequency-limited spectral reflectance functions. *Journal of the Optical Society of America*, 67(6), pp. 779-784, 1977.
- [29] Van Hateren, J.: Spatial, temporal and spectral preprocessing for colour vision. *Proceedings of the Royal Society of London B*, 251, pp. 61-68, 1993.
- [30] Wyszecki, G. and Stiles, W.: *Color science: concepts and methods, quantitative data and formulae*, 2nd ed. John Wiley & Sons, New York, USA, 1982.

## LIITE 1: Algoritmi kanava-arvojen sijainnin laskemiseksi.

```
//Kutsu: jakopisteet = epatasavalit(painofunktio, kanava-arvojen lukumaara,
//
//                                0,0,[]) // Rekursion parametreja
FUNCTION jakopisteet = epatasavalit(p[], z, z1, m, ala[])
//Alustus
    p[] = p[] / max(p[])
    IF (z1 == 0)
        ala[] = Painofunktion osavälien pinta-alat
    A0 = summa(ala[]) / (z - 1 - m)
    cumala = 0
    Lisää 1. ja (p[:n pituus). kanava jakopisteisiin
    z1 = 2
    i = 2
//Hae jakopisteet
    WHILE ((i < p[:n pituus) AND (z1 < z))
        cumala = cumala + ala[i-1]
        IF (ala[i]==0)
            cumala=0
            Lisää i. ja i+1. kanava jakopisteisiin
        END IF
        IF ((cumala >= A0) AND (i. kanava ei kuulu jakopisteisiin)
        AND (z1 < z))
            cumala = cumala - A0
            Lisää i. kanava jakopisteisiin
            Järjestä jakovälit siirtämällä jakopisteitä //ks luku 3.5
        END IF
        z1 = Jakopisteiden määrä
        i = i + 1
    END WHILE
//Jos jakopisteitä ei ole tarpeeksi, tee tarvittavat toimenpiteet
    IF ((ei olla rekursiivisessa kutsussa) AND (z1 < z))
        Tyhjennä jakopisteiden joukko
        Lisää 1. ja (p[:n pituus). kanava jakopisteisiin
        FOR i=1 TO p[:n pituus - 1
            IF (ala[i]==0)
                Lisää i. ja i+1. kanava jakopisteisiin
            jakopisteet = epatasavalit(p[], z, jakopisteiden määrä, m, ala)
            IF (jakopistejoukko ei muuttunut rekursiossa)
                i = 1
                WHILE (ala[i] != max(ala[]))
                    i = i + 1
                Lisää i. ja i+1. kanava jakopisteisiin
                ala[i] = 0
            END IF
        END IF
    END IF
END FUNCTION
```



**Liite 2: Eri näytteenottovälejä vastaavat kanavien lukumäärät Munsell-sarjoille.**

| <b>Näytteen-<br/>ottoväli</b> | <b>Kanavien<br/>määrä</b> | <b>Näytteen-<br/>ottoväli</b> | <b>Kanavien<br/>määrä</b> | <b>Näytteen-<br/>ottoväli</b> | <b>Kanavien<br/>määrä</b> | <b>Näytteen-<br/>ottoväli</b> | <b>Kanavien<br/>määrä</b> |
|-------------------------------|---------------------------|-------------------------------|---------------------------|-------------------------------|---------------------------|-------------------------------|---------------------------|
| <b>1 nm</b>                   | 401                       | <b>11 nm</b>                  | 37                        | <b>21 nm</b>                  | 20                        | <b>31 nm</b>                  | 13                        |
| <b>2 nm</b>                   | 201                       | <b>12 nm</b>                  | 34                        | <b>22 nm</b>                  | 19                        | <b>32 nm</b>                  | 13                        |
| <b>3 nm</b>                   | 134                       | <b>13 nm</b>                  | 31                        | <b>23 nm</b>                  | 18                        | <b>33 nm</b>                  | 13                        |
| <b>4 nm</b>                   | 101                       | <b>14 nm</b>                  | 29                        | <b>24 nm</b>                  | 17                        | <b>34 nm</b>                  | 12                        |
| <b>5 nm</b>                   | 81                        | <b>15 nm</b>                  | 27                        | <b>25 nm</b>                  | 17                        | <b>35 nm</b>                  | 12                        |
| <b>6 nm</b>                   | 67                        | <b>16 nm</b>                  | 26                        | <b>26 nm</b>                  | 16                        | <b>36 nm</b>                  | 12                        |
| <b>7 nm</b>                   | 58                        | <b>17 nm</b>                  | 24                        | <b>27 nm</b>                  | 15                        | <b>37 nm</b>                  | 11                        |
| <b>8 nm</b>                   | 51                        | <b>18 nm</b>                  | 23                        | <b>28 nm</b>                  | 15                        | <b>38 nm</b>                  | 11                        |
| <b>9 nm</b>                   | 45                        | <b>19 nm</b>                  | 22                        | <b>29 nm</b>                  | 14                        | <b>39 nm</b>                  | 11                        |
| <b>10 nm</b>                  | 41                        | <b>20 nm</b>                  | 21                        | <b>30 nm</b>                  | 14                        | <b>40 nm</b>                  | 11                        |